巴西复仇赛几何问题解答与评析

罗振华[1] 羊明亮[2] 谢柏庭[3] 熊斌[1]
(1. 华东师范大学, 200241; 2. 浙江省乐清市知临中学, 325600; 3. 清华大学, 100084)

巴西复仇赛 (Brazilian Olympic Revenge) 是巴西独具特色的一个数学竞赛, 它是由学生出题、教师考试的比赛, 其中的几何试题图形优美、难度颇大. 本文节选了近十年的复仇赛几何题, 给出解答和评析, 希望对读者有所裨益.

I. 试 题

1. 设锐角三角形 ABC 的外心为 O, 外接圆为 Γ. 设点 D, E, F 分别为 BC, CA, AB 的中点. 设 $M = OE \cap AD$, $N = OF \cap AD$, $P = CM \cap BN$, $X = AO \cap PE$, $Y = AP \cap OF$, r 为 Γ 在点 A 处的切线. 证明: r, EF, XY 三线共点.

(2009 年第 1 题)

2. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I. ω_A, ω_B 和 ω_C 分别为 $\triangle BIC, \triangle CIA$ 和 $\triangle AIB$ 的内切圆. T 为 ω_A 与 BC 的切点. 证明: ω_B 与 ω_C 除 AI 外的另一条内公切线过点 T (若 ω_B 与 ω_C 外切, 则这另一条外公切线仍视为 AI).

(2009 年第 3 题)

3. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ, 设弧 $\overset{\frown}{BC}$ (不含点 A) 上有顺次排列的四点 D, F, G, E, 且满足 $\angle BAD = \angle CAE, \angle BAF = \angle CAG$. 设 D', F', G', E' 分别为 AD, AF, AG, AE 与 BC 的交点. 设 DF' 与 EG' 交于 X, $D'F$ 与 $E'G$ 交于 Y, $D'G$ 与 $E'F$ 交于 Z, DG' 与 EF' 交于 W. 证明: X, Y, A 三点共线, Z, W, A 三点共线, 且 $\angle BAX = \angle CAZ$.

(2010 年第 6 题)

4. 设四边形 $ABCD$ 内接于圆 Γ. 设 r, s 为 Γ 的过点 B, C 的切线, r, s分别交直线 AD 于 M, N. E 为直线 BN 与 CM 的交点, F 为直线 AE 与 BC 的交点,

修订日期: 2020-02-23.

L 为线段 BC 的中点. 证明: $\triangle DLF$ 的外接圆与 Γ 相切.

(2011 年第 4 题)

5. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形. 设 K, L 分别为 AC 边上的高与以 AC 为直径的圆的两个交点, 其中 K 比 L 离 B 更近. 类似的, X, Y 分别为 AB 边上的高与以 AB 为直径的圆的两个交点, 其中 X 比 Y 离 C 更近. 证明: XL 与 KY 的交点在 BC 上.

(2013 年第 2 题)

6. 设锐角三角形 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ. $\angle BAC$ 的角平分线交 Γ 于 $M(\neq A)$. 一条平行于 BC 的直线 r 交 AC 于 X, 交 AB 于 Y. 直线 MX, MY分别交 Γ 于 $S, T(\neq M)$. 设直线 XY 与 ST 交于点 P. 证明: PA 为 Γ 的切线.

(2014 年第 1 题)

7. 设 Ω 与 Γ 为两个圆, 其中 Ω 在 Γ 的内部. 设 P 为 Γ 上一点, 过 P 作 PA, PB 与 Ω 相切, 交 Γ 于点 $A, B(\neq P)$. 证明: 当 P 在 Γ 上变化时, 直线 AB 与一个定圆相切.

(2016 年第 4 题)

8. 设三角形 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ. 设 R, S 分别为边 AB, AC 上的点, 满足 $BR = RS = SC$, Γ 在点 A 处的切线交直线 RS 于点 P, I 为 $\triangle ARS$ 的内心. 证明: $PA = PI$.

(2017 年第 2 题)

9. 设 $\triangle ABC$ 是一个不等边三角形, 其内心为 I, 外心为 O, 外接圆为 Γ. $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC, CA, AB 上的切点分别为 D, E, F. 直线 AI 分别交 EF 与 Γ 于点 N 及点 $M(\neq A)$. 直线 MD 交 Γ 于点 $L(\neq M)$, IL 交 EF 于点 K. 以 MN 为直径的圆交 Γ 于点 $P(\neq M)$. 证明: AK, PN, OI 三线共点.

(2018 年第 2 题)

10. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 其内心为 I, 内切圆为 ω. ω 与 BC, CA 及 AB 切于点 T_A, T_B, T_C. 设 l_A 为过 A 且平行于 BC 的直线, 类似定义 l_B, l_C. 设 $P_A = T_BT_C \cap l_A$, 类似定义 P_B, P_C. 设$S_A = P_BT_B \cap P_CT_C$, 类似定义 S_B, S_C. 记 L_A 为直线 AI 与 $\triangle ABC$ 外接圆的第二个交点, 类似定理 L_B, L_C. 证明: S_AL_A, S_BL_B, S_CL_C 三线共点.

(2018 年第 4 题)

11. 设 $\triangle ABC$ 为不等边锐角三角形, D 是 $\triangle ABC$ 的点 A 所对的陪位中线与 $\triangle ABC$ 外接圆的第二个交点. E 为 D 关于 BC 的对称点, C_0 为 E 关于 AB 的对称点, B_0 为 E 关于 AC 的对称点. 证明: 直线 AD, BB_0, CC_0 三线共点当且仅当 $\angle BAC = 60°$.

(2019 年第 1 题)

12. 设 Γ 是一个以 O 为圆心, R 为半径的圆. 设 X, Y 是 Γ 上的两点, 满足 $XY < R$. 设 I 是一个满足 $IX = IY$ 且 $XY = OI$ 的点. 请用尺规作图作出以 Γ 为外接圆, I 为内心, OX 为欧拉线的三角形. 并证明该三角形是唯一的.

(2019 年第 3 题)

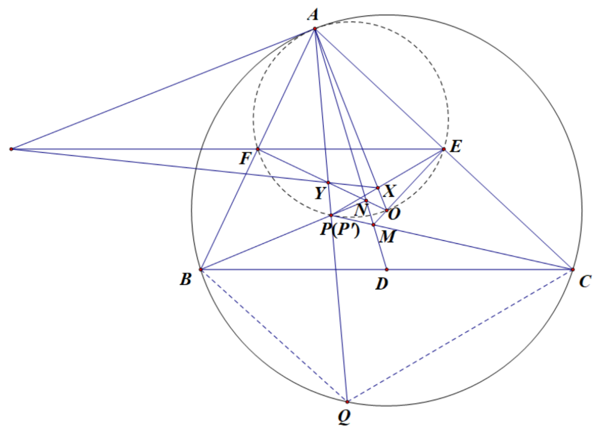
13. 设 ω 是 $\triangle ABC$ 的外接圆. 已知 D 是 $\angle ABC$ 的平分线与 AC 的交点, E 是 $\angle ACB$ 的平分线与 AB 的交点. 直线 DE 交 ω 于 F, G. 证明: ω 在 F, G 两点处的两条切线也是 $\triangle ABC$ 的点 A 所对旁切圆的切线.

(2020 年第 3 题)

II. 解答与评注

以下各题的解答主要整理自第 60 届 IMO 满分金牌谢柏庭同学的做法, 部分解答参考了上海中学几位集训队队员的做法.

1. 设锐角三角形 ABC 的外心为 O, 外接圆为 Γ. 设点 D, E, F 分别为 BC, CA, AB 的中点. 设 $M = OE \cap AD$, $N = OF \cap AD$, $P = CM \cap BN$, $X = AO \cap PE$, $Y = AP \cap OF$, r 为 Γ 在点 A 处的切线. 证明: r, EF, XY 三线共点.



证明 作 $\triangle ABC$ 的点 A 对应的陪位中线, 此线交 Γ 于除 A 以外的一点 Q, 设 AQ 的中点为 P'. 则 $ABQC$ 是调和四边形, 由调和四边形的几何性质

知 $\triangle P'AB \sim \triangle P'CA$. 又 OE, OF 分别是线段 AC, AB 的垂直平分线, 从而 $NA = NB, MA = MC$, 则 $\angle PBA = \angle DAB, \angle PCA = \angle DAC$. 故有

$$\angle P'BA = \angle P'AC = \angle DAB = \angle PBA,\ \angle P'CA = \angle P'AB = \angle DAC = \angle PCA.$$

所以 $P = P'$.

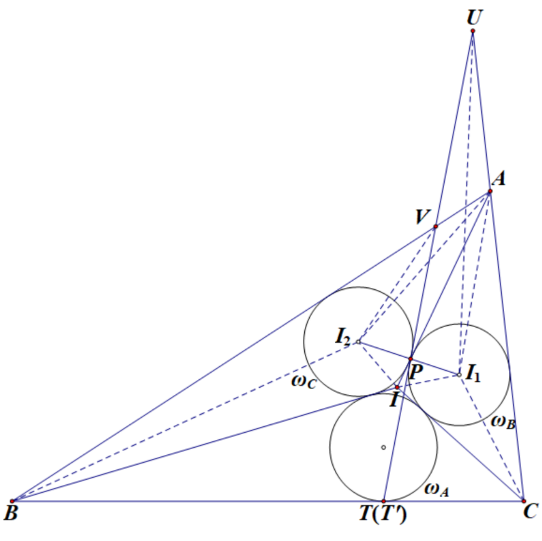
由 P' 为 AQ 中点, 知 P 也为 AQ 中点, 故 $OP \perp AQ$. 注意到 $\angle AEO = \angle AFO = \angle APO = 90°$, 则 A, F, P, O, E 五点共圆.

对退化的圆内接六边形 $AAPEFO$, 由 Pascal 定理知: r 与 EF 的交点, AP 与 OF 的交点 Y, PE 与 OA 的交点 X 三点共线. 即 r, EF, XY 三线共点. □

评注 这是一道中等难度的几何题. 先要刻画点 P 的几何位置, 利用调和四边形的性质并结合同一法不难得出 P 是 AQ 的中点且 A, F, P, O, E 五点共圆, 再对退化的圆内接六边形 $AAPEFO$ 应用 Pascal 定理即可得到结论.

2. 设 $\triangle ABC$ 的内心为 I. ω_A, ω_B 和 ω_C 分别为 $\triangle BIC, \triangle CIA$ 和 $\triangle AIB$ 的内切圆. T 为 ω_A 与 BC 的切点. 证明: ω_B 与 ω_C 除 AI 外的另一条内公切线过点 T (若 ω_B 与 ω_C 外切, 则这另一条外公切线仍视为 AI).

证明 1 设 ω_B, ω_C 的圆心分别为 I_1, I_2. 设 I_1I_2 交 AI 于 P, 过 P 作 ω_B, ω_C 的另一条内公切线, 此切线交 AB 于 V, 交 AC 于 U, 交 BC 于 T'.



下面证明:

$$\frac{BT'}{CT'} = \frac{\cot\frac{\angle ABC}{4}}{\cot\frac{\angle ACB}{4}}. \qquad (*)$$

对 $\triangle ABC$ 以及截线 $T'VU$, 由 Menelaus 定理知

$$\frac{BT'}{T'C} \cdot \frac{CU}{UA} \cdot \frac{AV}{VB} = 1,$$

从而

$$\frac{BT'}{CT'}=\frac{AU}{CU}\cdot\frac{BV}{AV}.$$

在 $\triangle AII_1$ 和 $\triangle AII_2$ 中,由正弦定理知

$$\frac{AI}{II_1}=\frac{\sin\angle AI_1I}{\sin\angle IAI_1},\quad \frac{AI}{II_2}=\frac{\sin\angle AI_2I}{\sin\angle IAI_2},$$

注意到 $\angle IAI_2=\angle IAI_1$, 两式相除得

$$\frac{II_2}{II_1}=\frac{\sin\angle AI_1I}{\sin\angle AI_2I}.$$

又 $\angle VBI_2=\frac{\angle ABC}{4}$, $\angle UCI_1=\frac{\angle ACB}{4}$, 且

$$\angle AI_2I=90^\circ+\frac{\angle ABC}{4}, \angle AI_1I=90^\circ+\frac{\angle ACB}{4},$$

从而

$$\frac{\cot\frac{\angle ACB}{4}}{\cot\frac{\angle ABC}{4}}=\frac{\sin\angle VBI_2}{\sin\angle UCI_1}\cdot\frac{\sin\angle AI_1I}{\sin\angle AI_2I}=\frac{\sin\angle VBI_2}{\sin\angle UCI_1}\cdot\frac{II_2}{II_1}.$$

那么

$$\begin{aligned}(*)\Leftrightarrow&\frac{BT'}{CT'}\cdot\frac{\cot\frac{\angle ACB}{4}}{\cot\frac{\angle ABC}{4}}=1\\ \Leftrightarrow&\frac{AU}{CU}\cdot\frac{BV}{AV}\cdot\frac{\sin\angle VBI_2}{\sin\angle UCI_1}\cdot\frac{II_2}{II_1}=1.\end{aligned}$$

在 $\triangle II_1I_2$ 中, 由正弦定理知

$$\frac{II_2}{II_1}=\frac{\sin\angle II_1I_2}{\sin\angle II_2I_1}=\frac{\sin\angle II_1P}{\sin\angle II_2P}.$$

在 $\triangle VI_2B$ 与 $\triangle UI_1C$ 中, 由正弦定理知

$$\frac{BV}{VI_2}=\frac{\sin\angle VI_2B}{\sin\angle VBI_2},\frac{CU}{UI_1}=\frac{\sin\angle UI_1C}{\sin\angle UCI_1},$$

即

$$BV\cdot\sin\angle VBI_2=VI_2\cdot\sin\angle VI_2B, CU\cdot\sin\angle UCI_1=UI_1\cdot\sin\angle UI_1C,$$

故

$$\frac{AU}{CU}\cdot\frac{BV}{AV}\cdot\frac{\sin\angle VBI_2}{\sin\angle UCI_1}=\frac{AU}{UI_1}\cdot\frac{VI_2}{AV}\cdot\frac{\sin\angle VI_2B}{\sin\angle UI_1C}.$$

则

$$(*)\Leftrightarrow\frac{AU}{UI_1}\cdot\frac{VI_2}{AV}\cdot\frac{\sin\angle VI_2B}{\sin\angle UI_1C}\cdot\frac{\sin\angle II_1P}{\sin\angle II_2P}=1.$$

注意到 $IPVB$ 为圆外切四边形, 则 $\angle VI_2B+\angle II_2P=180^\circ$, 同理 $\angle UI_1C+\angle II_1P=180^\circ$. 从而

$$(*)\Leftrightarrow\frac{AU}{UI_1}\cdot\frac{VI_2}{AV}=1.$$

在 $\triangle AUI_1$ 中, 由正弦定理知

$$\frac{AU}{UI_1}=\frac{\sin\angle AI_1U}{\sin\angle UAI_1},$$

又 $\angle AI_1U=\angle I_1AC-\angle I_1UC=\frac{1}{2}(\angle PAC-\angle PUC)=\frac{1}{2}\angle APU,\angle UAI_1=180^\circ-\frac{1}{4}\angle BAC$, 则

$$\frac{AU}{UI_1}=\frac{\sin\frac{\angle APU}{2}}{\sin\frac{\angle BAC}{4}},$$

同理

$$\frac{VI_2}{AV}=\frac{\sin\frac{\angle BAC}{4}}{\sin\frac{\angle APV}{2}}.$$

而 $\angle APU=\angle APV$, 所以

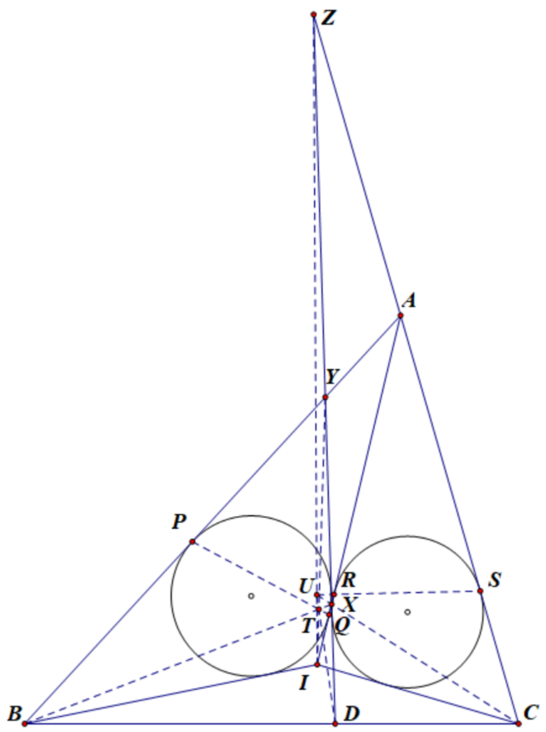
$$\frac{AU}{UI_1}\cdot\frac{VI_2}{AV}=1.$$

故 $(*)$ 成立,又 $\frac{BT}{CT}=\frac{\cot\frac{\angle ABC}{4}}{\cot\frac{\angle ACB}{4}}$, 所以 $T=T'$, 原命题获证! $\square$

证明 2 (上海中学 邵子健) 先证明如下一般的命题.

引理 I 是 $\triangle ABC$ 内部任意一点, $\triangle ABI,\triangle ACI$ 的内切圆除 AI 外另一条内公切线交 BC 于 D, 则

$$\frac{BD}{CD}=\frac{\cot\frac{\angle ABI}{2}}{\cot\frac{\angle ACI}{2}}.$$



引理的证明 如图设另一条公切线分别与 AI,AB,AC 交于 X,Y,Z, 两内切

圆与 AB, AI, AI, AC 的切点分别为 P, Q, R, S.

对圆外切四边形 $BYXI$, 由 Newton 定理知 BX, YI, PQ 交于一点, 设交点为 T. 同理可设 CX, ZI, RS 交于一点 U.

由于 $BY\bigcap CZ = A, YT\bigcap ZU = I, BT\bigcap CU = X$, 且 A, X, I 三点共线, 对 $\triangle BYT$ 与 $\triangle CZU$ 由 Desargues 定理逆定理知 BC, YZ, TU 三线共点或互相平行, 这里不可能三线互相平行, 所以 BC, YZ, TU 三线共点. 注意到 $BC\bigcap XY = D$, 所以 T, U, D 三点共线.

对 $\triangle BXC$ 及截线 TUD, 由 Menelaus 定理知

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CU}{UX}\cdot\frac{XT}{TB} = 1, \tag{1}$$

对 $\triangle ABX$ 及截线 PQT, 由 Menelaus 定理知

$$\frac{BP}{PA}\cdot\frac{AQ}{QX}\cdot\frac{XT}{TB} = 1, \tag{2}$$

对 $\triangle ACX$ 及截线 SUR, 由 Menelaus 定理知

$$\frac{AS}{SC}\cdot\frac{CU}{UX}\cdot\frac{XR}{RA} = 1. \tag{3}$$

注意到 $AP = AQ, AR = AS$, $(2)\times(3)\div(1)$ 可得

$$\frac{DC}{BD}\cdot\frac{BP}{SC}\cdot\frac{XR}{QX} = 1,$$

即

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BP}{SC}\cdot\frac{XR}{QX}.$$

记 r_1, r_2 分别为 $\triangle ABI, \triangle ACI$ 的内切圆半径, 那么 $BP = r_1\cdot\cot\frac{\angle ABI}{2}, SC = r_2\cdot\cot\frac{\angle ACI}{2}$. 而 X 是两内切圆内位似中心, 则 $\frac{XR}{QX} = \frac{r_2}{r_1}$. 故有

$$\frac{BD}{DC} = \frac{r_1\cdot\cot\frac{\angle ABI}{2}}{r_2\cdot\cot\frac{\angle ACI}{2}}\cdot\frac{r_2}{r_1} = \frac{\cot\frac{\angle ABI}{2}}{\cot\frac{\angle ACI}{2}}.$$

引理获证!

回到原题. 取引理中的 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, 设 ω_B, ω_C 的另一条内公切线交 BC 于 T', 由引理知

$$\frac{BT'}{CT'} = \frac{\cot\frac{\angle ABI}{2}}{\cot\frac{\angle ACI}{2}} = \frac{\cot\frac{\angle CBI}{2}}{\cot\frac{\angle BCI}{2}},$$

又

$$\frac{BT}{CT} = \frac{\cot\frac{\angle CBI}{2}}{\cot\frac{\angle BCI}{2}},$$

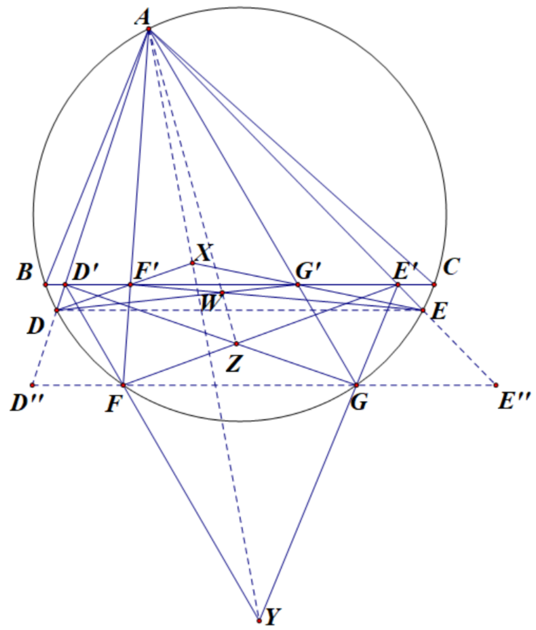
所以 $T = T'$, 原命题获证! □

评注 这是一道非常困难的几何题. 本题与 Malfatti 问题 (详见 [1]) 密切相

关, 它是几何大师 Jakob Steiner 对 Malfatti 问题的纯几何解法中的一个关键步骤. 这道几何题最大的难点在于 ω_B,ω_C 的另一条内公切线与 BC 的交点位置不好刻画. 先标出这条内公切线与 AI, AB, AC 的交点. 法一先用 Menelaus 定理把 $\frac{BT'}{CT'}$ 转化成 $\frac{AU}{CU}\cdot\frac{BV}{AV}$, 再不断使用正弦定理与圆外切四边形的性质最后得出结论. 法二证明了比原题一般的引理, 引理的证明中非常巧妙地运用了圆外切四边形的 Newton 定理及 Desargues 定理逆定理得出了 T, U, D 三点共线, 再使用三次 Menelaus 定理算出了 $\frac{BD}{DC}$, 从而证得结论.

3. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ, 设弧 $\overset{\frown}{BC}$ (不含点 A) 上有顺次排列的四点 D, F, G, E, 且满足 $\angle BAD = \angle CAE, \angle BAF = \angle CAG$. 设 D', F', G', E' 分别为 AD, AF, AG, AE 与 BC 的交点. 设 DF' 与 EG' 交于 X, $D'F$ 与 $E'G$ 交于 Y, $D'G$ 与 $E'F$ 交于 Z, DG' 与 EF' 交于 W. 证明: X, Y, A 三点共线, Z, W, A 三点共线, 且 $\angle BAX = \angle CAZ$.

证明 连结 DE ,并设直线 AD, AE 分别交直线 FG 于 D'', E''.



由 $\angle BAD = \angle CAE, \angle BAF = \angle CAG$ 知 $BC \parallel DE \parallel FG$.

对 $\triangle ADE$ 及点 X, 由角元形式的 Ceva 定理知

$$\frac{\sin\angle DAX}{\sin\angle EAX}\cdot\frac{\sin\angle AEX}{\sin\angle DEX}\cdot\frac{\sin\angle EDX}{\sin\angle ADX}=1,$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\sin\angle DAX}{\sin\angle EAX}&=\frac{\sin\angle DEX}{\sin\angle AEX}\cdot\frac{\sin\angle ADX}{\sin\angle EDX}=\frac{\sin\angle EG'E'}{\sin\angle E'EG}\cdot\frac{\sin\angle D'DF'}{\sin\angle DF'D'}\\&=\frac{EE'}{E'G'}\cdot\frac{D'F'}{DD'}=\frac{EE'}{DD'}\cdot\frac{D'F'}{E'G'}=\frac{AE'}{AD'}\cdot\frac{D'F'}{E'G'}.\end{aligned}$$

对 $\triangle AD'E'$ 及点 Y, 由角元形式的 Ceva 定理知

$$\frac{\sin\angle D'AY}{\sin\angle E'AY}\cdot\frac{\sin\angle AE'Y}{\sin\angle D'E'Y}\cdot\frac{\sin\angle E'D'Y}{\sin\angle AD'Y}=1,$$

从而

$$\begin{aligned}\frac{\sin\angle D'AY}{\sin\angle E'AY}&=\frac{\sin\angle D'E'Y}{\sin\angle AE'Y}\cdot\frac{\sin\angle AD'Y}{\sin\angle E'D'Y}=\frac{\sin\angle E'GE''}{\sin\angle E''E'G}\cdot\frac{\sin\angle D''D'F}{\sin\angle D'FD''}\\&=\frac{E'E''}{E''G}\cdot\frac{D''F}{D'D''}=\frac{E'E''}{D'D''}\cdot\frac{D''F}{E''G}=\frac{AE'}{AD'}\cdot\frac{D'F'}{E'G'}.\end{aligned}$$

故

$$\frac{\sin\angle DAX}{\sin\angle EAX}=\frac{\sin\angle D'AY}{\sin\angle E'AY},$$

则 $\angle DAX=\angle D'AY$, 所以 X,Y,A 三点共线.

同理, Z,W,A 三点共线, 且有

$$\frac{\sin\angle D'AZ}{\sin\angle E'AZ}=\frac{AE'}{AD'}\cdot\frac{D'G'}{E'F'}.$$

利用熟知的结论, 知

$$\frac{D'F'}{E'F'}=\frac{AD'\cdot\sin\angle D'AF'}{AE'\cdot\sin\angle E'AF'},\frac{D'G'}{E'G'}=\frac{AD'\cdot\sin\angle D'AG'}{AE'\cdot\sin\angle E'AG'},$$

注意到 $\angle D'AF'=\angle E'AG',\angle D'AG'=\angle E'AF'$, 上两式相乘得

$$\frac{D'F'}{E'F'}\cdot\frac{D'G'}{E'G'}=\left(\frac{AD'}{AE'}\right)^2,$$

即

$$\left(\frac{AE'}{AD'}\right)^2\cdot\frac{D'F'}{E'G'}\cdot\frac{D'G'}{E'F'}=1,$$

从而

$$\frac{\sin\angle DAX}{\sin\angle EAX}\cdot\frac{\sin\angle D'AZ}{\sin\angle E'AZ}=1,$$

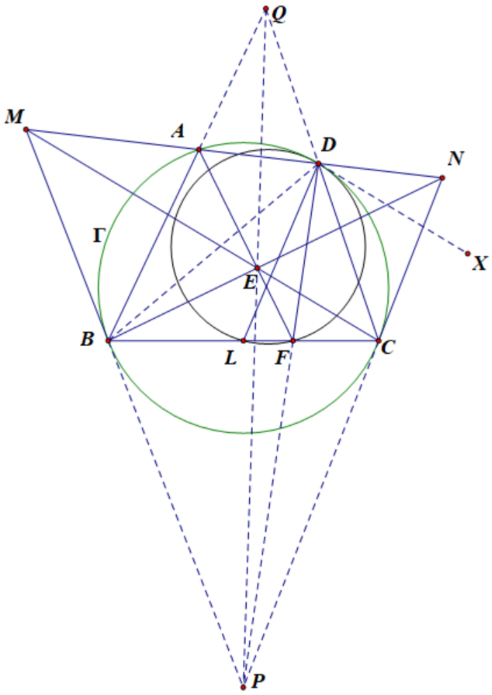
则 $\angle DAX=\angle E'AZ$, 又 $\angle BAD=\angle CAE'$, 所以 $\angle BAX=\angle CAZ$. 原命题获证! □

评注 这是一道比较困难的几何题. 上述解法主要通过角元形式的 Ceva 定理计算相关角的正弦比值来证明结论.

4. 设四边形 $ABCD$ 内接于圆 Γ. 设 r,s 为 Γ 的过点 B,C 的切线, r,s分别交直线 AD 于 M,N. E 为直线 BN 与 CM 的交点, F 为直线 AE 与 BC 的交点, L 为线段 BC 的中点. 证明: $\triangle DLF$ 的外接圆与 Γ 相切.

证明 设 r 与 s 交于点 P, AB 与 CD 交于点 Q (若两直线平行导致没有交点, 则可视为交于直线上的无穷远点, 下面的证明依然奏效). 如图所示, 在圆 Γ

关于点 D 的切线上取点 X.



由正弦定理知

$$\frac{\sin\angle CBN}{\sin\angle NBQ}=\frac{CN\cdot\sin\angle NCB}{NA\cdot\sin\angle NAB}=\frac{CD\cdot BC}{CA\cdot BD},$$
$$\frac{\sin\angle QCM}{\sin\angle MCB}=\frac{CA\cdot BD}{AB\cdot BC},$$
$$\frac{\sin\angle BQP}{\sin\angle PQC}=\frac{BP\cdot\sin\angle PBQ}{CP\cdot\sin\angle PCQ}=\frac{AB}{CD},$$

三式相乘得

$$\frac{\sin\angle CBN}{\sin\angle NBQ}\cdot\frac{\sin\angle BQP}{\sin\angle PQC}\cdot\frac{\sin\angle QCM}{\sin\angle MCB}=1,$$

对 $\triangle QBC$ 及直线 BN,CM,QP, 由角元形式的 Ceva 定理逆定理知: 直线 BN,CM,QP 共点于 E.

对直线 PBM 及直线 CDQ, 由 Pappus 定理知: PD 与 BC 的交点, PQ 与 CM 的交点 E 及 BQ 与 DM 的交点 A 三点共线. 即 PD,BC,AE 三线共点, 从而 F 在 PD 上, 则 DF 为 $\triangle BDC$ 中点 D 对应的陪位中线. 故有

$$\angle FDX=\angle FDC+\angle CDX=\angle LDB+\angle DBL=\angle DLF,$$

所以 DX 与 $\triangle DLF$ 的外接圆相切. 即 $\triangle DLF$ 的外接圆与 Γ 相切.

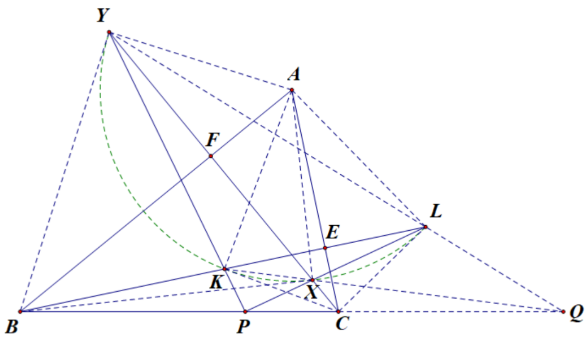
原命题获证! □

评注 这是一道比较困难的几何题. 上述解法先用角元形式的 Ceva 定理证明了 BN,CM,QP 三线共点, 再巧妙地运用了 Pappus 定理得到了 F 在 DP 上

即 DF 是 $\triangle DBC$ 的陪位中线, 最后通过导角证得了结论.

5. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形. 设 K,L 分别为 AC 边上的高与以 AC 为直径的圆的两个交点, 其中 K 比 L 离 B 更近. 类似的, X,Y 分别为 AB 边上的高与以 AB 为直径的圆的两个交点, 其中 X 比 Y 离 C 更近. 证明: XL 与 KY 的交点在 BC 上.

证明 设 KY 与 XL 交于 P, KX 与 YL 交于 Q. B 在 AC 上的投影为 E, C 在 AB 上的投影为 F.



由射影定理并结合 $\triangle ABE \sim \triangle ACF$, 知 $AX^2 = AY^2 = AF \cdot AB = AE \cdot AC = AK^2 = AL^2$, 从而 $AX = AY = AK = AL$, 则 Y,K,X,L 四点共圆且圆心为 A, 记此圆为 Γ.

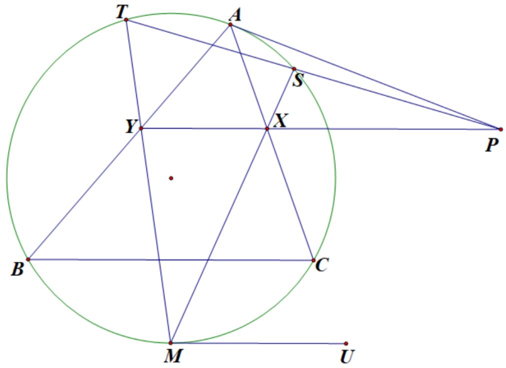
又 $BX \perp AX, BY \perp AY, CK \perp AK, CL \perp AL$, 故 BX,BY,CK,CL 均为 Γ 的切线. 对退化的圆内接六边形 $YYKXXL$, 由 Pascal 定理知: B,P,Q 三点共线. 同理, C,P,Q 三点共线. 所以 B,P,C,Q 四点共线, 从而 P 在 BC 上. 原命题获证! $\square$

评注 这是一道中等难度的几何题. 本题是一道合成题, 前半部分 Y,K,X,L 四点共圆且圆心为 A 是已有的结论, 后半部分 B,P,C,Q 四点共线也是经典的几何结构.

6. 设锐角三角形 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ. $\angle BAC$ 的角平分线交 Γ 于 $M(\neq A)$. 一条平行于 BC 的直线 r 交 AC 于 X, 交 AB 于 Y. 直线 MX, MY 分别交 Γ 于 $S,T(\neq M)$. 设直线 XY 与 ST 交于点 P. 证明: PA 为 Γ 的切线.

证明 过 M 作 Γ 的切线, 如图所示在切线上取一点 U.

由 M 为弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点知: $MU \parallel BC \parallel XY$, 故有 $\angle YXM = \angle XMU = \angle STY$, 则 X,S,T,Y 四点共圆, 记此圆为 ω.



考虑 Γ, ω 及 $\triangle AXY$ 的外接圆这三个圆两两的根轴, 注意到 Γ 与 $\triangle AXY$ 的外接圆的根轴为 Γ 在点 A 处的切线, Γ 与 ω 的根轴是 ST, ω 与 $\triangle AXY$ 的外接圆的根轴是 XY, 由蒙日定理知: 这三条根轴共点. 所以 PA 为 Γ 的切线, 原命题获证! $\square$

评注 这是一道中等难度的几何题. 本题的关键在于发现点 P 是 Γ, ω 及 $\triangle AXY$ 的外接圆这三个圆的根心, 从而得出 PA 为 Γ 的切线.

7. 设 Ω 与 Γ 为两个圆, 其中 Ω 在 Γ 的内部. 设 P 为 Γ 上一点, 过 P 作 PA, PB 与 Ω 相切, 交 Γ 于点 $A, B (\neq P)$. 证明: 当 P 在 Γ 上变化时, 直线 AB 与一个定圆相切.

证明 此题是如下 Poncelet 闭合定理的三角形形式的推论:

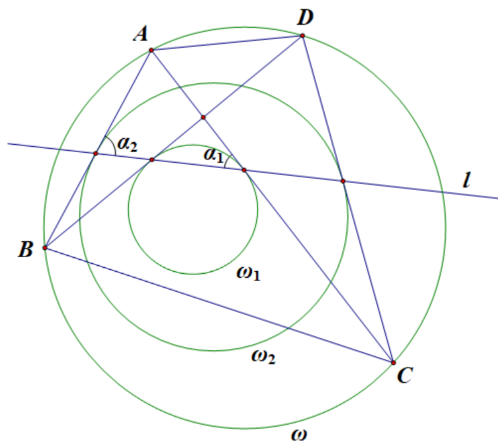
设一个三角形的顶点在共轴圆组的一个定圆上连续地移动, 两条边分别与这组圆中另两个固定的圆连续地相切, 则第三条边与这组圆中一个固定的圆相切. $(*)$

如果一条直线 l 与圆内接四边形 $ABCD$ 的一组对边成等角, 利用圆内接四边形的角度关系不难说明 l 与四边形 $ABCD$ 的三组对边均成等角, 故与圆内接四边形三组对边均成等角的直线是存在的. 我们需要用到以下引理.

引理 设一条直线 l 与圆内接四边形 $ABCD$ 的三组对边均成等角, 则过它与每一组对边的两个交点可作一个圆与这两条边相切, 并且这样的三个圆与已知圆共轴 (圆内接四边形的对角线 AC, BD 也视为一组对边).

引理的证明 记已知圆为 ω. 因为一组对边与直线 l 成等角, 所以可以作一个圆在交点处与这两条边相切. 记所作的三个圆为 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, 用 $\rho(T, \omega_i)$ 表示点 T 对圆 ω_i 的幂, 直线 l 与 ω_i 相切的两边夹角为 α_i ($i = 1, 2, 3$) . 由正弦定理知

$$\frac{\rho(A, \omega_1)}{\rho(A, \omega_2)} = \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_2},$$



同理 B, C, D 也有相同的性质, 由 Casey 圆幂定理知 ω 与 ω_1, ω_2 共轴. 同理, ω 也与 ω_2, ω_3 共轴. 从而 $\omega, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ 这四个圆共轴. 引理获证!

下面回到 $(*)$ 的证明.

设 $\triangle A_1A_2A_3, \triangle B_1B_2B_3$ 为满足要求的圆 c 的内接三角形, A_1A_2, B_1B_2 与圆 c_3 相切, A_1A_3, B_1B_3 与圆 c_2 相切. 下面证明 A_2A_3, B_2B_3 与同一共轴圆组中某个固定的圆 c_1 相切.

考虑四边形 $A_1B_1A_2B_2$, 注意到 A_1A_2 与 B_1B_2 同与 c_3 相切且内接于 c, 由引理, A_1B_1 与 A_2B_2 同与这组圆中一个圆相切, 设为 c'. 同理 A_1B_1 与 A_3B_3 也如此, 设其对应圆为 c''. 当 $\triangle B_1B_2B_3$ 连续地变为 $\triangle A_1A_2A_3$ 时, c' 与 c'' 连续地变为 c, 而 A_1B_1 与 A_2B_2 分别变成 c 在 A_1 与 A_2 的切线. c 在 A_1 的切线当然还与这共轴圆组中另一个圆 $\bar{c}$ 相切, $\bar{c}$ 与 c 在根轴的两侧. 当 B_1 移到 A_1 的位置时, 共轴圆中两个与 A_1B_1 相切的圆, 一个变到极限位置 c, 另一个变为 $\bar{c}$. 但 c' 与 c'' 都变为 c, 而不变为 $\bar{c}$, 所以 $c' = c''$.

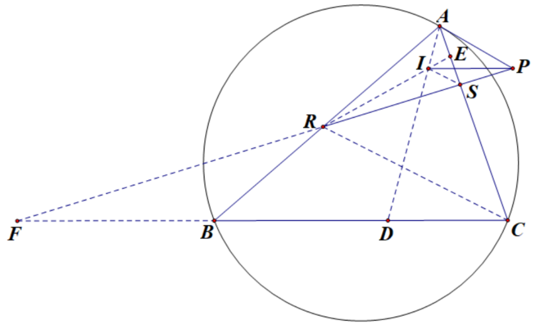
再由引理, 对四边形 $A_2B_2A_3B_3$, A_2B_2 与 A_3B_3 均与 c' 相切, 故 A_2A_3 与 B_2B_3 均与该共轴圆组中同一圆相切. 又 A_2A_3 为定直线, 当 B_2B_3 连续变动时, B_2B_3 仅能与一个固定的圆相切, $(*)$ 得证!

特别地, 原命题获证! $\square$

评注 这是一道非常困难的轨迹问题. 上述解法参考了 [2] 中的 §119, 证明了 Poncelet 闭合定理的三角形形式.

8. 设三角形 $\triangle ABC$ 的外接圆为 Γ. 设 R, S 分别为边 AB, AC 上的点, 满足 $BR = RS = SC$, Γ 在点 A 处的切线交直线 RS 于点 P, I 为 $\triangle ARS$ 的内心. 证明: $PA = PI$.

证明 1 设 AI 交 BC 于 D, RI 交 AS 于 E, PR 交 BC 于 F. 再设 $AS = b, AR = c, BR = RS = SC = a$.



注意到 $RS = CS$, 则有 $\angle RCS = \frac{1}{2}\angle RSA = \angle ISA$, 从而 $IS \parallel RC$. 由角平分线定理可算得 $ES = \frac{ab}{a+c}$, 故有

$$\frac{CR}{IS} = \frac{CE}{ES} = 1 + \frac{a}{\frac{ab}{a+c}} = \frac{a+b+c}{b}.$$

又

$$\frac{FR}{SP} = \frac{FR}{RS} \cdot \frac{RS}{SP},$$

而

$$\frac{RS}{SP} = \frac{RP}{SP} - 1 = \frac{AR \cdot \sin\angle RAP}{AS \cdot \sin\angle SAP} - 1 = \frac{c(c+a)}{b(b+a)} - 1 = \frac{(c-b)(a+b+c)}{b(b+a)},$$

对 $\triangle ARS$ 及截线 FBC, 由 Menelaus 定理知

$$\frac{AB}{BR} \cdot \frac{RF}{FS} \cdot \frac{SC}{CA} = 1,$$

那么

$$\frac{RS}{FR} = \frac{FS}{FR} - 1 = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{SC}{BR} - 1 = \frac{AB}{AC} - 1 = \frac{c+a}{b+a} - 1 = \frac{c-b}{b+a},$$

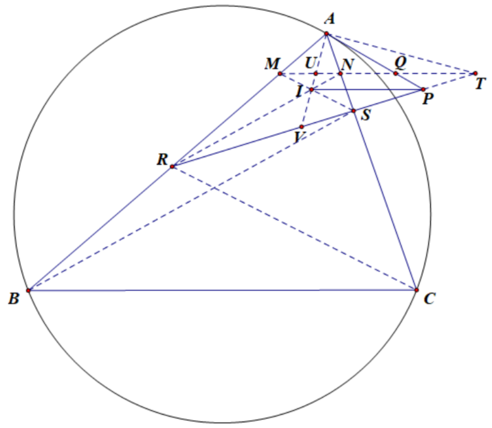
故

$$\frac{FR}{SP} = \frac{FR}{RS} \cdot \frac{RS}{SP} = \frac{b+a}{c-b} \cdot \frac{(c-b)(a+b+c)}{b(b+a)} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{CR}{IS}.$$

结合 $\angle CRF = \angle ISP$ 知 $\triangle FRC \sim \triangle PSI$, 则有 $\angle RFC = \angle SPI$, 即 $FC \parallel PI$. 故 $\angle PIA = \angle CDA = \angle PAI$, 从而 $PA = PI$. 原命题获证! □

证明 2 (上海中学 黄凤麟) 设直线 SI 与直线 AB 交于点 M, 设直线 RI 与直线 AC 交于点 N. 再设直线 RS, AP, AI 分别与直线 MN 交于点 T, Q, U, 设直线 AI 与直线 RS 交于点 V.

利用熟知的结论, R, S, V, T 为调和点列, 那么直线 AR, AS, AV, AT 成调和线束, 又 AV 是 $\angle RAS$ 的内角平分线, 则 AT 是 $\angle RAS$ 的外角平分线, 故



$\angle TAV = 90°$.

由 $SC = SR$ 知: $\angle CRS = \frac{1}{2}\angle ASR$, 而 SM 是 $\angle ASR$ 的内角平分线, 那么 $\angle ASM = \frac{1}{2}\angle ASR$, 则 $\angle CRS = \angle ASM$, 故 $SM \parallel CR$, 同理可得 $RN \parallel BS$. 从而

$$\frac{AM}{AR} = \frac{AS}{AC}, \frac{AN}{AS} = \frac{AR}{AB},$$

上两式相除可得

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC},$$

所以 $MN \parallel BC$.

由于 AP 是 $\triangle ABC$ 的外接圆在点 A 处的切线, 则 $\angle PAM = 180° - \angle ACB = 180° - \angle ANM$, 故 AP 也是 $\triangle AMN$ 的外接圆在点 A 处的切线. 从而

$$\angle QAU = \angle PAU = \angle PAM - \angle MAU = \angle QNA - \angle UAN = \angle AUQ,$$

则 $QA = QU$.

下面说明 $QU \parallel PI$.

由 $\angle TAU = 90°$ 并结合 $QA = QU$ 知 Q 是线段 TU 的中点. 由熟知的结论, A, I, U, V 构成调和点列, 则有

$$\frac{UI}{IV} = \frac{UA}{AV}, \tag{1}$$

对 $\triangle TUV$ 及截线 AQP, 由 Menelaus 定理知

$$\frac{TQ}{QU} \cdot \frac{UA}{AV} \cdot \frac{VP}{PT} = 1,$$

而 $TQ = QU$, 上式化为

$$\frac{UA}{AV} = \frac{TP}{PV}, \tag{2}$$

结合 (1),(2) 可知

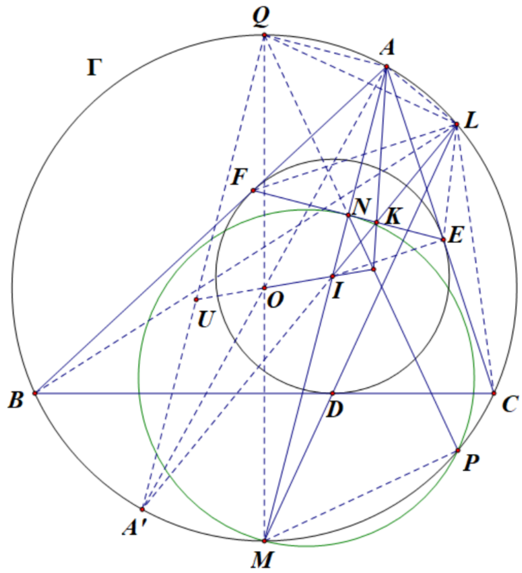
$$\frac{TP}{PV}=\frac{UI}{IV},$$

故 $QU \parallel PI$. 又 $QA=QU$, 所以 $PA=PI$. 原命题获证! $\square$

评注 这是一道中等难度的几何题. 法一主要通过计算线段的比例得到 $\triangle FRC\sim\triangle PSI$, 再由 $FC\parallel PI$ 证得 $PA=PI$. 法二先利用了调和点列及平行线的性质将问题转化为证明 $QU\parallel PI$, 再利用调和点列的性质及 Menelaus 定理证得了结论.

9. 设 $\triangle ABC$ 是一个不等边三角形, 其内心为 I, 外心为 O, 外接圆为 Γ. $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC,CA,AB 上的切点分别为 D,E,F. 直线 AI 分别交 EF 与 Γ 于点 N 及点 $M(\neq A)$. 直线 MD 交 Γ 于点 $L(\neq M)$, IL 交 EF 于点 K. 以 MN 为直径的圆交 Γ 于点 $P(\neq M)$. 证明: AK,PN,OI 三线共点.

证明 设弧 $\widehat{BAC}$ 的中点为 Q, 倍长 IO 至点 U.



则由 $\angle NPM=90^\circ$ 知: Q,N,P 三点共线, 注意到 Q,O,M 三点共线且 $QO=OM$, 从而 $QU\parallel IM$ 且 $QU=IM$. 由 $NK\perp AI, QA\perp AI$ 知 $NK\parallel AQ$, 又 $QU\parallel NI$, 故

$$UI,QN,AK\text{三线共点}\Leftrightarrow\frac{NI}{QU}=\frac{NK}{QA}\Leftrightarrow\frac{NK}{QA}=\frac{NI}{IM}\Leftrightarrow\frac{NI}{NK}=\frac{IM}{QA}.\qquad(1)$$

由 LM 平分 $\angle BIC$ 知

$$\frac{LB}{LC}=\frac{BD}{DC}=\frac{BF}{EC},$$

结合 $\angle LBF=\angle LCE$ 知: $\triangle LBF\sim\triangle LCE$, 故 $\angle LFB=\angle LEC$, 则有 A,F,E,L 五点共圆. 又 A,F,I,E 四点共圆, 所以 A,F,I,E,L 五点共圆.

那么 $\angle ALI=\angle AEI=90^\circ$, 有 IL 过 A 关于 Γ 的对径点 A'. 又 $A'Q\perp AQ, AI\perp AQ$, 则 $A'Q\parallel AI$, 故 $\angle LIM=180^\circ-\angle LIA=180^\circ-\angle LA'Q=\angle LAQ$, 又 $\angle LQA=\angle LMI$, 故 $\triangle LQA\sim\triangle LMI$. 则

$$\frac{NK}{NI}=\tan\angle KIN=\tan\angle AIL=\frac{AL}{IL}=\frac{AQ}{IM},$$

结合 (1) 知: UI,QN,AK 三线共点, 即 OI,PN,AK 三线共点. 证毕! □

评注 这是一道比较困难的几何题. 上述证明通过 $QU\parallel NI$ 巧妙地把问题转化为证明 (1) 式, 再利用共圆和三角形相似证明了 (1) 式.

10. 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, 其内心为 I, 内切圆为 ω. ω 与 BC,CA 及 AB 切于点 T_A,T_B,T_C. 设 l_A 为过 A 且平行于 BC 的直线, 类似定义 l_B,l_C. 设 $P_A=T_BT_C\cap l_A$, 类似定义 P_B,P_C. 设$S_A=P_BT_B\cap P_CT_C$, 类似定义 S_B,S_C. 记 L_A 为直线 AI 与 $\triangle ABC$ 外接圆的第二个交点, 类似定理 L_B,L_C. 证明: S_AL_A,S_BL_B,S_CL_C 三线共点.

证明 设 IT_A 交 T_BT_C 于 R_A, 类似定义 R_B,R_C. 取 N_A 为 S_AL_A 的中点, 类似定义 N_B,N_C. 我们先证明: S_B 为 $\triangle IAC$ 的垂心.

由于

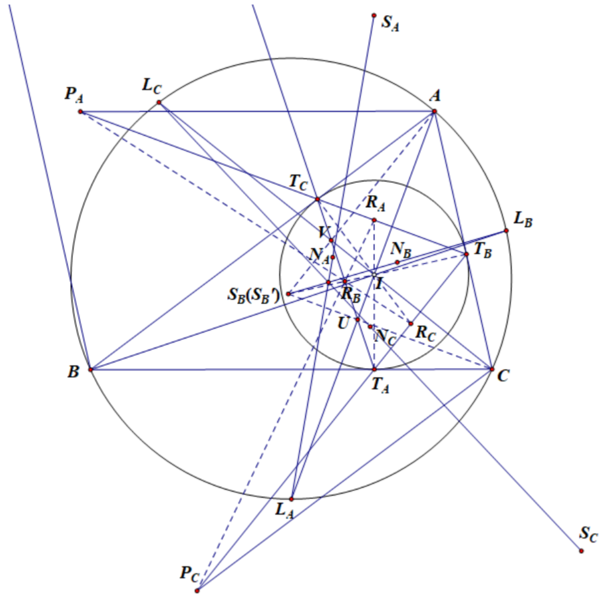
$$\begin{aligned}\frac{P_AT_C}{P_AT_B}&=\frac{AT_C\cdot\sin\angle P_AAT_C}{AT_B\cdot\sin\angle P_AAT_B}=\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle ACB}=\frac{\sin\frac12\angle ABC\cos\frac12\angle ABC}{\sin\frac12\angle ACB\cos\frac12\angle ACB}\\&=\frac{T_AT_C\sin\angle R_AT_AT_C}{T_AT_B\sin\angle R_AT_AT_B}=\frac{R_AT_C}{R_AT_B},\end{aligned}$$

故 P_A,R_A,T_C,T_B 成调和点列. 结合 T_AR_A,T_BR_B,T_CR_C 三线共点于 I 知: P_A,R_B,R_C 三点共线. 同理, R_A,R_B,T_C 三点共线.

对直线 $P_AT_CR_A$ 及直线 $P_CT_AR_C$, 由 Pappus 定理知: P_AT_A 与 P_CT_C 的交点 S_B、 P_AR_C 与 P_CR_A 的交点 R_B、 T_CR_C 与 T_AR_A 的交点 I 三点共线, 故 S_B,R_B,I,T_B 四点共线.

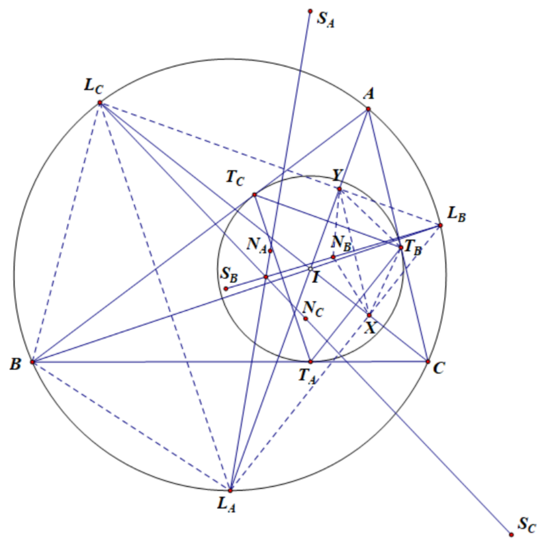
由 P_A,R_A,T_C,T_B 成调和点列知直线 $T_AP_A,T_AR_A,T_AT_C,T_AT_B$ 成调和线束, 故 S_B,I,R_B,T_B 成调和点列.

设 AI,CI 分别交 T_AT_C 于 U,V, AV 交 CU 于 S'_B, 熟知 $AU\perp CU,AV\perp CV$, 那么 S'_B 为 $\triangle AIC$ 的垂心, 从而 S'_B,I,R_B,T_B 成调和点列 (完全四边形 AVS'_BUCI 的对角线 S'_BI 被另两条对角线调和分割). 因此 $S_B=S'_B$, 即 S_B 为 $\triangle AIC$ 的垂心.



下面用角元形式的 Ceva 定理证明 S_AL_A, S_BL_B, S_CL_C 三线共点.

由 S_B 为 $\triangle AIC$ 的垂心, L_B 为 $\triangle AIC$ 的外心知 N_B 为 $\triangle AIC$ 的九点圆圆心. 设 L_AL_B 交 CI 于 X, L_BL_C 交 AI 于 Y. 则 X, Y 分别为 CI, AI 的中点. 故 N_B 为 $\triangle XT_BY$ 的外心.



注意到 $\angle N_BXL_B = 90^\circ - \angle N_BXI = 90^\circ - (\angle T_BXI - \angle N_BXT_B) = 90^\circ - [2 \cdot \frac{1}{2}\angle ACB - (90^\circ - \angle XYT_B)] = 180^\circ - \angle ACB - \frac{1}{2}\angle BAC = \angle ABL_A$, 同理 $\angle N_BYL_B = \angle CBL_C$. 故有

$$\frac{\sin \angle L_CL_BS_B}{\sin \angle L_AL_BS_B} = \frac{N_BY \cdot \sin \angle N_BYL_B}{N_BX \cdot \sin \angle N_BXL_B} = \frac{\sin \angle CBL_C}{\sin \angle ABL_A} = \frac{CL_C}{AL_A},$$

同理,

$$\frac{\sin \angle L_BL_AS_A}{\sin \angle L_CL_AS_A} = \frac{BL_B}{CL_C}, \frac{\sin \angle L_AL_CS_C}{\sin \angle L_BL_CS_C} = \frac{AL_A}{BL_B},$$

故

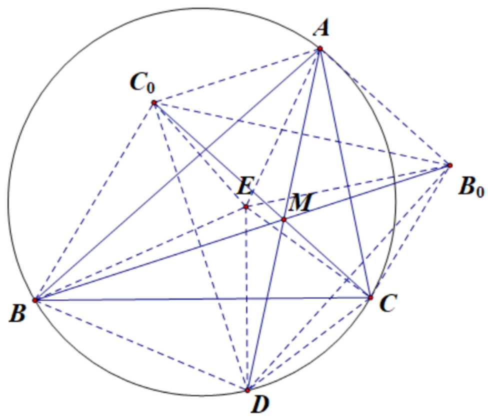
$$\frac{\sin\angle L_CL_BS_B}{\sin\angle L_AL_BS_B}\cdot\frac{\sin\angle L_BL_AS_A}{\sin\angle L_CL_AS_A}\cdot\frac{\sin\angle L_AL_CS_C}{\sin\angle L_BL_CS_C}=1.$$

由角元形式的 Ceva 定理逆定理知: S_AL_A, S_BL_B, S_CL_C 三线共点. 证毕! □

评注 这是一道构型复杂、非常困难的几何题. 上述解法先综合运用了调和点列、Pappus 定理等结论证明了 S_B 是 $\triangle AIC$ 的垂心, 再用角元形式的 Ceva 定理证明了 S_AL_A, S_BL_B, S_CL_C 三线共点.

11. 设 $\triangle ABC$ 为不等边锐角三角形, D 是 $\triangle ABC$ 的点 A 所对的陪位中线与 $\triangle ABC$ 外接圆的第二个交点. E 为 D 关于 BC 的对称点, C_0 为 E 关于 AB 的对称点, B_0 为 E 关于 AC 的对称点. 证明: 直线 AD, BB_0, CC_0 三线共点当且仅当 $\angle BAC=60^\circ$.

证明 1 取 AD 的中点 M (下图中看上去 AD, BB_0, CC_0 三线共点于 M, 这是需要证明的), 由于 $ABDC$ 是调和四边形, 从而 $\angle MBA=\angle DBC=\angle EBC$, 同理 $\angle MCA=\angle ECB$, 故 M, E 为 $\triangle ABC$ 的一对等角共轭点. 从而 $\angle MAB_0=\angle MAC+\angle CAB_0=\angle MAC+\angle CAE=\angle MAC+\angle MAB=\angle BAC$, 类似可知 $\angle MAC_0=\angle BAC$, 则 $\angle MAB_0=\angle MAC_0$, 结合 $AB_0=AE=AC_0$ 可知 $\triangle MAB_0\cong\triangle MAC_0$, 故 $AM\perp B_0C_0$.



由于 $BD=BE=BC_0$, 则

$$\frac{\sin\angle BB_0C_0}{\sin\angle BB_0D}=\frac{BC_0\cdot\sin\angle BC_0B_0}{BD\cdot\sin\angle BDB_0}=\frac{\sin\angle BC_0B_0}{\sin\angle BDB_0},$$

而

$$\begin{aligned}\angle BC_0B_0&=\angle BC_0E+\angle EC_0B_0=90^\circ-\angle EBA+\angle EAC\\&=90^\circ-\angle ABC+\angle EBC+\angle MAB=90^\circ-\angle ABC+\angle BAC,\end{aligned}$$

$$\angle BDB_0=\angle BDC-\angle CDB_0=180^\circ-\angle BAC-(90^\circ-\frac{1}{2}\angle DCB_0)$$
$$=180^\circ-\angle BAC-(90^\circ-\angle ACB)=90^\circ-\angle BAC+\angle ACB.$$

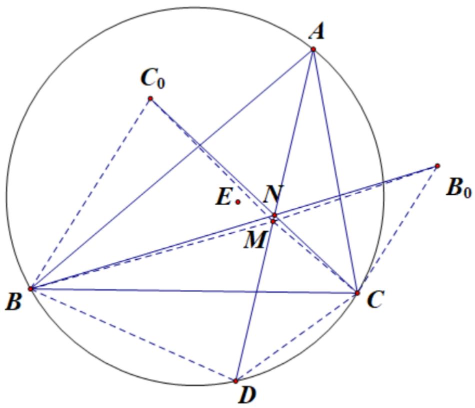
记 $\angle BAC-\angle ABC=\alpha,\angle ACB-\angle BAC=\beta$. 则有
$$\frac{\sin\angle BB_0C_0}{\sin\angle BB_0D}=\frac{\sin\angle BC_0B_0}{\sin\angle BDB_0}=\frac{\sin(90^\circ+\alpha)}{\sin(90^\circ+\beta)}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta},$$
类似地,
$$\frac{\sin\angle CC_0D}{\sin\angle CC_0B_0}=\frac{\sin\angle CDC_0}{\sin\angle CB_0C_0}=\frac{\sin(\angle ABC-\angle BAC+90^\circ)}{\sin(\angle BAC-\angle ABC+90^\circ)}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$
又
$$\angle B_0DA=\angle CDA-\angle CDB_0=\angle CDA-(90^\circ-\angle ACB)=90^\circ-\angle BAC,$$
$$\angle C_0DA=\angle BDA-\angle BDC_0=90^\circ-\angle BAC,$$
故有
$$\frac{\sin\angle BB_0C_0}{\sin\angle BB_0D}\cdot\frac{\sin\angle CC_0D}{\sin\angle CC_0B_0}\cdot\frac{\sin\angle B_0DA}{\sin\angle ADC_0}=1\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\cos^2\beta.$$
对 $\triangle DB_0C_0$ 及直线 DA,B_0B,C_0C, 由角元形式的 Ceva 定理及其逆定理知:
$$AD,BB_0,CC_0\text{三线共点}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\cos^2\beta.$$
而 $\alpha+\beta=\angle ACB-\angle ABC\in(-90^\circ,90^\circ),\alpha+\beta\neq0,\alpha-\beta=180^\circ-3\angle BAC\in(-90^\circ,180^\circ)$. 故
$$\cos^2\alpha=\cos^2\beta\Leftrightarrow\alpha=\beta\Leftrightarrow\angle BAC=60^\circ.$$
原命题获证! □

证明 2 (上海中学 颜川皓) 一方面, 若直线 AD,BB_0,CC_0 三线共点, 设这三条直线共点于 N.

设 M 为线段 AD 的中点. 由 $ABDC$ 为调和四边形知 $\angle MBD=\angle ABC=\frac{1}{2}\angle C_0BD$, 又 $C_0B=EB=DB$, 则 $\triangle DMB\cong\triangle C_0MB$. 同理有 $\triangle DMC\cong\triangle D_0MC$, 从而 $MC_0=MD=MB_0$.

若 $M\neq N$, 由调和四边形的性质知 $\triangle BMD\sim\triangle DMC$, 从而 $BM\cdot MC=MD^2=MB_0\cdot MC_0$. 又 $\angle BMC_0=\angle BMD=\angle DMC=\angle CMB_0$, 则 $\angle BMB_0=\angle CMC_0$, 所以 $\triangle BMB_0\sim\triangle C_0MC$. 那么 $\angle MBN=\angle MC_0N$, 则 M,B,C_0,N 四点共圆, 从而 $\angle C_0NB=\angle C_0MB=\angle BMD=\angle BC_0N$, 故 $BN=BC_0=BE$, 同理可得 $CN=CB_0=CE$, 则 $N=E$, 那么 AM 是 $\angle BAC$ 的平分线, 从而 $AB=AC$, 这与 $\triangle ABC$ 为不等边三角形矛盾!

所以 B, M, B_0 三点共线, 那么 $180^\circ = \angle BMB_0 = 3\angle BMD = 3\angle BAC$, 这说明 $\angle BAC = 60^\circ$.



另一方面, 若 $\angle BAC = 60^\circ$, 则 $\angle BMB_0 = \angle BMD + \angle DMC + \angle CMB_0 = 3\angle BAC = 180^\circ$, 这说明 M 在 BB_0 上, 同理可知 M 也在 CC_0 上, 从而 BB_0, CC_0, AD 共点于 M.

综上可知, 原命题获证! □

评注 这是一道中等难度的几何题. 法一巧妙地对 $\triangle DB_0C_0$ 用 Ceva 定理解决了问题, 值得注意的是如果对 $\triangle ABC$ 用 Ceva 定理则转化后的问题并不好解决. 法二分两方面来证, 其中必要性是简单的, 充分性的证明中使用反证法了三线共点于 M.

12. 设 Γ 是一个以 O 为圆心, R 为半径的圆. 设 X, Y 是 Γ 上的两点, 满足 $XY < R$. 设 I 是一个满足 $IX = IY$ 且 $XY = OI$ 的点. 请用尺规作图作出以 Γ 为外接圆, I 为内心, OX 为欧拉线的三角形. 并证明该三角形是唯一的.

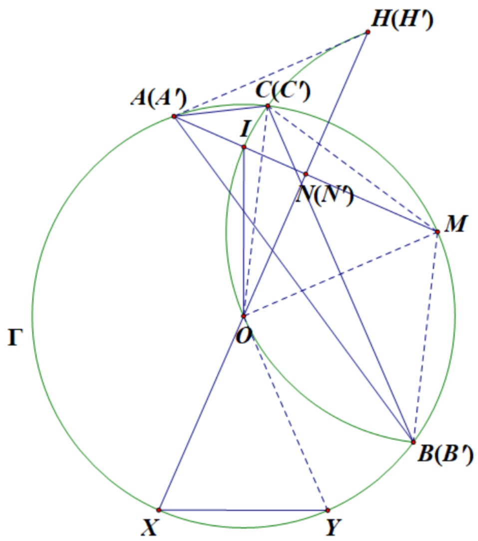
解 利用尺规可作: 1. 一点到一定直线的垂线; 2. 一定线段的中垂线. 故可过 I 作 OX 的垂线, 交 OI 的中垂线于 M.

由 $IO \perp XY, IM \perp OX$ 知: $\angle MOI = \angle MIO = \angle OXY = \angle OYX$. 又 $OI = YX$, 从而 $\triangle OIM \cong \triangle YXO$, 则 $OM = YO$, M 在 Γ 上, 延长 MI 交 Γ 于另一点 A. 以 M 为圆心, MI 为半径作圆 M, 交 Γ 于 B, C.

下证这样得到的 $\triangle ABC$ 满足要求.

注意到 M 是弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点且 $MI = MC = MB$, 由鸡爪定理逆定理知 I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

设 OX 交 $\odot M$ 于 O 与 H. 由 $AM \perp OX$ 知: AM, OH 互相平分. 故 $AH /\!/ OM$



且 $AH = OM$, 则 $AH \perp CB$ 且

$$\frac{AH}{CB} = \frac{OM}{CB} = \cot \angle COM = \cot \angle CAB,$$

故 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, OX 为 $\triangle ABC$ 的 Euler 线. 又 Γ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆, 所以 $\triangle ABC$ 满足要求.

下证满足要求的 $\triangle ABC$ 是唯一的.

设 $\triangle A'B'C'$ 也满足要求, 设它的九点圆圆心为 N', 内切圆半径为 r, 由 Euler 公式

$$r = \frac{R^2 - OI^2}{2R},$$

由 Feuerbach 定理, $\triangle A'B'C'$ 的九点圆与内切圆内切, 从而 $N'I = \frac{R}{2} - r$. 故

$$N'I = \frac{OI^2}{2R} = OI \cdot \frac{XY}{2R} = OI \cdot |\cos \angle XOI|,$$

则 N' 为 I 在 OX 上的射影. 那么, $\triangle A'B'C'$ 的垂心 H' 为 O 关于 N' 的对称点, 从而 $H = H'$, 则 $IO = IH'$.

又 O, H' 是 $\triangle A'B'C'$ 的等角共轭点 (一个三角形的外心与垂心构成一对等角共轭点), 故 A', B', C' 中任一者 X' 均满足: 要么 X' 在 OH' 的中垂线 IN' 上; 要么 O, I, H', X' 四点共圆. 结合 IN' 即为 IM, $\odot(OIH')$ 即为 $\odot M$ ($\odot M$ 就是 $\odot(OIH)$) 知

$$\{A', B', C'\} \subseteq \{A, B, C, M\}.$$

又 I 为 $\triangle A'B'C'$ 的内心且在 $\triangle A'B'C'$ 的内部, 故 A, M 不同时在 $\{A', B', C'\}$ 中, 则 B, C 在 $\{A', B', C'\}$ 中. 又 $\angle CMA \neq \angle BMA$ (若 $\angle CMA = \angle BMA$, 则 $AB = AC$, 那么 AM 是 $\odot O$ 的直径, 从而 I 在直线 OM 上, 与 $OI \perp XY$ 矛盾),

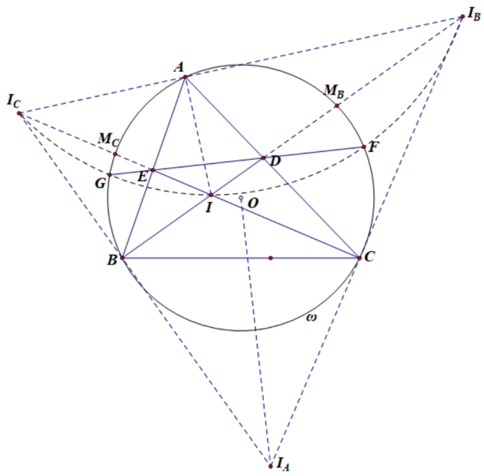
故 $\{A',B',C'\}=\{A,B,C\}$, 唯一性获证!

综上, 我们用尺规作出了唯一的满足要求的 $\triangle ABC$. $\square$

评注 这是一道比较困难的几何作图题. 上述解法的作图部分先利用 $\triangle ABC$ 中有一顶点 A 满足 $AI\perp OX$ 这条性质来定出点 A, 再由鸡爪定理逆定理定出点 B 与 C. 唯一性部分先用 Euler 公式与 Feuerbach 定理得到 $\triangle A'B'C'$ 的九点圆圆心 N' 为 I 在 OX 上的射影, 进而 $\triangle A'B'C'$ 的垂心 H' 也与 $\triangle ABC$ 的垂心 H 重合, 最后用外心与垂心互为等角共轭点证得了唯一性.

13. 设 ω 是 $\triangle ABC$ 的外接圆. 已知 D 是 $\angle ABC$ 的平分线与 AC 的交点, E 是 $\angle ACB$ 的平分线与 AB 的交点. 直线 DE 交 ω 于 F,G. 证明: ω 在 F,G 两点处的两条切线也是 $\triangle ABC$ 的点 A 所对旁切圆的切线.

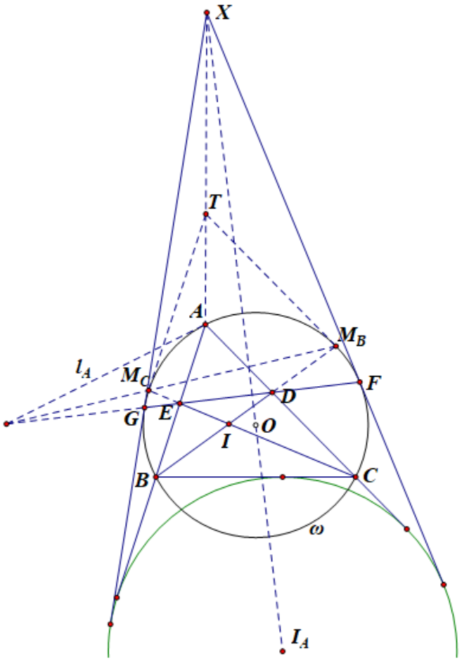
证明 设 $\triangle ABC$ 的点 A,B,C 对应的旁心为 I_A,I_B,I_C. 先证明 $OI_A\perp DE$.



设 BD 交 ω 于 M_B, CE 交 ω 于 M_C. 则 B,I,D,M_B,I_B 共线, 由鸡爪定理知: A,I,C,I_B 四点共圆, 且该圆的圆心为 M_B. 由圆幂定理知: $DI\cdot DI_B=DA\cdot DC$, $DA\cdot DC=DF\cdot DG$, 那么 $DI\cdot DI_B=DF\cdot DG$, 故 F,I,G,I_B 四点共圆, 同理 F,I,G,I_C 四点共圆, 从而 F,I,G,I_C,I_B 五点共圆.

由于 $\triangle ABC$ 的外接圆是 $\triangle I_AI_BI_C$ 的九点圆, 那么 I_AI_B,I_AI_C 的中点均在 $\triangle ABC$ 的外接圆上, 而由鸡爪定理知 II_A 的中点也在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 以 I_A 为位似中心, $\frac{1}{2}$ 为位似比作位似变换, 则 $\triangle II_BI_C$ 的外接圆变换到 $\triangle ABC$ 的外接圆, 从而这两圆的连心线经过 I_A, 又这两圆的公共弦为 FG, 所以 $OI_A\perp FG$, 即 $OI_A\perp DE$.

设直线M_BM_C 关于 ω 的极点是 T, 直线 DE 关于 ω 的极点是 X.



对退化的圆内接六边形 $BAACM_CM_B$, 由 Pascal 定理知: ω 在点 A 处的切线 l_A 与直线 M_BM_C 的交点在直线 DE 上. 即直线 l_A, M_BM_C, DE 三线共点.注意到 A 是 l_A 关于 ω 的极点, T 是 M_BM_C 关于 ω 的极点, X 是 DE 关于 ω 的极点. 所以 A, T, X 三点共线. 又 $OI_A \perp DE, OX \perp DE$, 则 I_A, O, X 三点共线. 故 X 是直线 AT 与 OI_A 的交点.

作一个外位似变换把 $\triangle ABC$ 的外接圆变换到点 A 对应的旁切圆, 由 $TM_B \parallel AC, TM_C \parallel AB$, 则 $T \to A, O \to I_A$. 所以 X 就是两圆的外位似中心. 由 XF, XG 是 ω 的切线可知它也是圆 I_A 的切线. 原命题获证! □

评注 这是一道比较困难的几何题. 首先需要证明 $OI_A \perp DE$, 证明过程中出现的 F, I, G, I_C, I_B 五点共圆这个结论在 2006 年俄罗斯数学奥林匹克 11 年级第四题中也用到过 (详见 [3]). 也可以用圆幂定理分别计算 D, E 两点对 $\odot O$ 与 $\odot I_A$ 的幂, 再用等差幂线来证垂直. 接下来证明直线 FG 关于 $\odot O$ 的极点 X 就是两圆的外位似中心, 利用 Pascal 定理结合极点极线的性质可得 A, T, X 三点共线, 再由已证的 $OI_A \perp DE$ 可得 I_A, O, X 三点共线, 最后由位似变换的性质可证得 X 就是位似中心.

致谢 感谢李先颖老师仔细审阅了本文并提出的修改意见.

参考文献

[1] 维基百科 https://en.wikipedia.org/wiki/Malfatti_circles.

[2] 约翰逊. 近代欧氏几何学[M]. 单墫, 译. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2012.

[3] 2006 IMO 中国国家集训队教练组. 走向 IMO: 数学奥林匹克试题集锦 [M]. 上海:华东师范大学出版社, 2006.