预给径向半径的凸多边形内径问题

朱天明 吴雨桐

(北京大学数学科学学院 2019 级, 100871)

今年二月的哈佛–麻省 (HMMT) 数学竞赛中有这样一个问题:

问题 1 一个平面上的凸多边形叫做“宽的”, 如果它在任意直线上投影的长度均不小于 1. 证明: 任一“宽的”的凸多边形都包含一个半径为 $\frac{1}{3}$ 的圆.

冷岗松教授提出一个对偶问题, 称作为预给径向半径的凸多边形内径问题:

问题 2 如果一个凸多边形内存在一点, 过该点的任意直线与凸多边形相交形成的截线段的长度均不小于 1. 问这个凸多边形能包含一个多大的圆?

本文解决了这个问题, 即证明了如下定理:

定理 如果一个平面上的凸多边形内存在一点, 过该点的任意直线与凸多边形相交形成的截线段的长度均不小于 1, 则该凸多边形能包含一个半径为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 的圆.

先证明下面两个引理.

引理 1 对 $x,\ y,\ z \in (0,\ \frac{\pi}{2}),\ x+y+z=\pi$, 有以下不等式成立:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{\sin^2 x}{\cos x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x\right)\geq 0.$$

证明 考虑函数

$$f\left(x\right)=\frac{\sin^2 x}{\cos x}-\frac{\sqrt{3}}{2}\tan x,$$

则

$$f''\left(x\right)=\frac{1+\sin^2 x+\cos^4 x-\sqrt{3}\sin x}{\cos^3 x}\geq 0,\ x\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right),$$

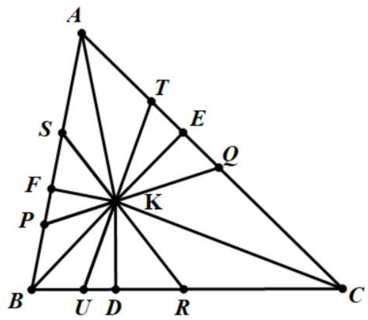
修订日期: **2019-12-08.**

从而由琴生不等式:

$$f(x)+f(y)+f(z)\geq 3f\left(\frac{x+y+z}{3}\right)=3f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0,$$

即证. $\square$

引理 2 如果一个平面上的 $\triangle ABC$ 内(不含边界)存在一点 K, 过 K 的任意直线与 $\triangle ABC$ 相交形成的截线段的长度均不小于 1, 则该三角形内切圆半径 r 至少为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.



证明 过点 K 作 $\angle BAC$ 的角平分线的垂线分别交直线 AB, AC 于点 P, Q, 类似定义 R, S, T, U. 则无论这些点位置如何, 均有 $PQ\geq 1$, $RS\geq 1$, $TU\geq 1$. 我们有:

$$KE+KF=\cos\frac{A}{2}(KQ+KP)=PQ\cos\frac{A}{2}.$$

同理有

$$KF+KD=RS\cos\frac{B}{2},\ KD+KE=TU\cos\frac{C}{2}.$$

从而我们可知

$$KD=\frac{1}{2}\left(RS\cos\frac{B}{2}+TU\cos\frac{C}{2}-PQ\cos\frac{A}{2}\right).$$

同理有另外两式, 于是

$$\begin{aligned}r&=\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}=\frac{2\left(S_{\triangle AKB}+S_{\triangle BKC}+S_{\triangle CKA}\right)}{a+b+c}=\frac{aKD+bKE+cKF}{a+b+c}\\&=\frac{PQ\cos\frac{A}{2}(b+c-a)+RS\cos\frac{B}{2}(c+a-b)+TU\cos\frac{C}{2}(a+b-c)}{2(a+b+c)}\\&\geq\frac{\cos\frac{A}{2}(b+c-a)+\cos\frac{B}{2}(c+a-b)+\cos\frac{C}{2}(a+b-c)}{2(a+b+c)}\end{aligned}$$

从而只需证明:

$$\sum_{\text{cyc}}\cos\frac{A}{2}(b+c-a)\geq\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{\text{cyc}}(b+c-a),$$

而

$$\sum_{\text{cyc}} \cos\frac{A}{2}\left(\frac{b+c-a}{2r}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{\text{cyc}}\frac{b+c-a}{2r}=\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{\cos^2\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cot\frac{A}{2}\right)\geq 0,$$

在引理 1 中令

$$x=\frac{\pi-A}{2},\ y=\frac{\pi-B}{2},\ z=\frac{\pi-C}{2}$$

知最后一个不等式成立, 即证. □

定理证明 考虑所有和该多边形至少三条边相切, 且在多边形内部的圆的集合 C.

首先说明 C 非空. 对该凸多边形的任意两条边, 考虑所有与这两条边相切的圆构成的圆系, 则由凸性和连续性知, 该圆系中必有一个圆和除此两条边以外的第三条边相切, 从而 C 非空.

由于从该多边形的边集中选三条边的方法数有限, 故 C 有限. 取 C 中面积最大(或之一)的圆 Γ, 考虑与它相切的边与 Γ 的切点集 T. 若 T 中任三点构成钝角三角形, 考虑 T 分 Γ 的弧中最长(或之一)的弧 MN, 若该弧为劣弧, 则 M, N 关于 Γ 的对径点 $M.N.$ 构成的劣弧上必没有 T 中的点, 则 T 分 Γ 的弧中必有一条包含 $M.N.$, 这是更长的弧, 矛盾. 从而所有 T 中的点都在 Γ 某条直径的一侧, 故可以将该圆的圆心向一侧稍移动, 再将半径稍增加, 直至与多边形的某条边 k 相切. 再将圆心沿直线 k 所在的方向平移, 半径保持不变, 直到与另一条边相切. 用和说明 C 非空同样的办法, 可知存在一个比 Γ 更大的 C 中的圆, 矛盾. 进而 T 中必有三个点构成非钝角三角形.

若此三个点构成直角三角形, 则存在两条直线 p, q, 满足 $p\parallel q$, 且 p, q 和 Γ 相切, 由多边形的凸性可知该多边形位于 p, q 构成的带形中. 从而考虑垂直于 p 的截线段, 可知

$$r\geq\frac{1}{2}>\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

若此三点构成锐角三角形, 则 Γ 在此三点的切线交出一个三角形, 由凸性可知该凸多边形在此三角形内部, Γ 为此三角形的内切圆, 而此三角形满足引理 2 的条件, 即证. □

显然, $\frac{\sqrt{3}}{4}$ 是最优的.