一个高维空间计数极值问题

冯跃峰

2017 年中国数学奥林匹克中有如下一个试题:

问题 设 n, k 是正整数, $T = \{(x, y, z)|x, y, z \in \mathbb{N}, 1 \le x, y, z \le n\}$ 是空间直角坐标系中 n^3 个整点构成的集合. 已知 T 中 $(3n^2 - 3n + 1) + k$ 个点被染成红色, 满足如下条件: 如果 T 中两点 P, Q 为红点, 且 PQ 平行于坐标轴, 则线段 PQ 上的所有整点都为红点. 证明: 存在至少 k 个互不相同的立方体, 其棱长为 1, 且每个顶点为红点.

咋一看, 觉得题中的数据"$(3n^2 - 3n + 1) + k$" 非常奇怪: 不仅含有两类参数, 而且式子较为复杂. 这自然想到, 解题时先不必纠缠具体数值, 可假定染有 p 个红点, 然后估计红立方体的个数 $f(p)$ 的下界.

进一步想到, 可否求出 $f(p)$ 的最小值?

回答是肯定的. 本文证明: 对 k 维空间, 按题设方式将 p 个格点染红色, 则红色 k 维方格个数 $f_k(p)$ 的最小值为 $\max\{p + (n-1)^k - n^k, 0\}$. 先给出若干定义.

定义 1 对 k 维空间 $\Omega = \{(x_1, x_2, \cdots, x_k)|x_i \in \mathbb{R}, 1 \le i \le k\}$ 的点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, 若所有 $x_i \in \mathbb{Z}, 1 \le i \le k$, 则称 P 为格点.

定义 2 对 k 维空间的点 $P(x_1, x_2, \cdots, x_k)$, 固定 $k-1$ 个分量 $x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_k$, 而第 j 个分量取遍所有实数, 则 P 运动得到的点的集合称为第 j 个维度方向上的一条直线. 特别地, 当固定的 $k-1$ 个分量 $x_1, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, x_{j+2}, \cdots, x_k$ 都是整数时, 相应直线称为第 j 个维度方向上的一条格线.

定义 3 对任何整数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$, 由 k 维空间的 $2k$ 个点构成的集合 $G = \{(x_1 + i_1, x_2 + i_2, \cdots, x_k + i_k) \mid i_t \in \{0, 1\}, 1 \le t \le k\}$ 称为一个"k 维方格", G

修订日期: **2019-10-24.**

中每个点都称为 k 维方格的顶点, 而点 $(x_1,x_2,\cdots,x_k),(x_1+1,x_2+1,\cdots,x_k+1)$ 分别称为该 k 维方格的“最小”, “最大”顶点. 以 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 为最小顶点的 k 维方格记为 $[x_1,x_2,\cdots,x_k]$.

注意到 $G=\{(x_1+i_1,x_2+i_2,\cdots,x_k+i_k)\mid i_t\in\{0,1\}\}=G_1\cup G_2$, 其中 $G_1=\{(x_1+i_1,x_2+i_2,\cdots,x_{j-1}+i_{j-1},x_j,x_{j+1}+i_{j+1},\cdots,x_k+i_k)\mid i_t\in\{0,1\},1\le t\le k,t\ne j\}$, $G_2=\{(x_1+i_1,x_2+i_2,\cdots,x_{j-1}+i_{j-1},x_{j+1},x_{j+1}+i_{j+1},\cdots,x_k+i_k)\mid i_t\in\{0,1\},1\le t\le k,t\ne j\}$. 而 G_1,G_2 都可分别看成是 k 维空间去掉第 j 个维度方向后得到的 $k-1$ 维空间中的 $k-1$ 维方格, 且 G_2 由 G_1 按第 j 个维度方向平移一个单位长度后得到.

定理 对于 k 维空间 n^k 个格点构成的 $n\times n\times\cdots\times n$ 点阵:

$$\omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_k)\mid x_i\in\mathbb{N},1\le x_i\le n,1\le i\le k\},$$

将 ω 中的部分格点按格线不间断地染成红色, 即: 对同一格线上的任意两个红点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_k),Q(y_1,y_2,\cdots,y_k)$, 不妨设它们在第 $j(1\le j\le k)$ 个维度方向的格线上, 其中 $x_i=y_i(1\le i\le k,i\ne j),x_j<y_j$, 则该格线上介于 P,Q 之间上的任意格点 $M(z_1,z_2,\cdots,z_k)$ 都为红点, 其中 $z_i=x_i=y_i,x_j\le z_j\le y_j$ $(1\le i\le k,i\ne j)$.

设共染有 p 个红点, 记顶点为红色的 k 维方格的个数为 $f_k(p)$, 则 $f_k(p)$ 的最小值为 $\max\{p+(n-1)^k-n^k,0\}$.

证明 对 k 归纳. 当 $k=1$ 时, 1 维方格为

$$G=\{x_1+i_1\mid i_1\in\{0,1\}\}=\{x_1,x_1+1\},$$

它可看成 1 维空间的单位线段.

由于格线上不间断地染了 p 个红格点, 其红单位线段的条数 $f_1(p)\ge p-1$ (当 $p=0$ 时等号不成立).

又 $f_1(p)\ge 0$, 所以 $f_1(p)\min=\max\{p+(n-1)^1-n^1,0\}$, 结论成立.

设结论对 $k-1$ 成立, 考察 k 的情形.

将 n^k 个格点构成的 $n\times n\times\cdots\times n$ 点阵分为 n 层, 第 r 层格点构成的集合为

$$\omega_r=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{k-1},r)\mid x_i\in\mathbb{N},1\le x_i\le n,1\le i\le k-1\}.$$

设 ω_r 上有 p_r 个红格点, 其中 $\sum\limits_{r=1}^{n}p_r=p$ $(1\le i\le n)$.

由 $k-1$ 维的结论, ω_r 上 $k-1$ 维红方格个数 $f_{k-1}(p_r)\ge p_r+(n-1)^{k-1}-n^{k-1}$,

于是 $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$ 上 $k-1$ 维红方格的个数:

$$S_{k-1} = \sum_{r=1}^{n} f_(k-1)(p_r) \geq \sum_{r=1}^{n} \left[p_r + (n-1)^{k-1} - n^{k-1}\right] = p + n(n-1)^{k-1} - n^k.$$

上述每个 $k-1$ 维红方格都有一个最小顶点, 共得到 S_{k-1} 个"最小顶点". 将所有 S_{k-1} 个"最小顶点"按所在第 k 维度方向格线的位置分为 $(n-1)^{k-1}$ 个类 (对于 $k-1$ 维方格 $[x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}]$, 必须 $x_1+1 \leq n, x_2+1 \leq n, \cdots, x_{k-1}+1 \leq n$, 从而 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ 均有 $n-1$ 种取值), 设第 j 类中含有 t_j 个"最小顶点"($1 \leq j \leq (n-1)^{k-1}$), 对应 t_j 个红色 $k-1$ 维方格,于是

$$\sum_{j=1}^{(n-1)^{k-1}} t_j = S_{k-1} \geq p + n(n-1)^{k-1} - n^k.$$

下面证明, 第 j 类"最小顶点"在同一条第 k 个维度方向格线上的分布是"不间断"的 (虽然由染色规则, 每条第 k 个维度方向的格线上两个"最小顶点"之间的格点都是红色, 但并不保证都是"最小顶点").

实际上, 若有第 k 个维度方向的格线上的两个"最小顶点" P, Q 之间的格点 $(z_1, z_2, \cdots, z_k)$ 不是某个 $k-1$ 维红方格的"最小顶点", 则存在 $i_1, i_2, \cdots, i_k \in \{0, 1\}$, 使 $(z_1+i+1, z_2+i_2, \cdots, z_k+i_k)$ 不是红点.

设 P, Q 对应的 $k-1$ 维红方格与 $(z_1+i_1, z_2+i_2, \cdots, z_k+i_k)$ 在同一第 k 个维度方向格线上的顶点分别为 $(x_1+i_1, x_2+i_2, \cdots, x_k+i_k), (y_1+i_1, y_2+i_2, \cdots, y_k+i_k)$, 则介于红点 $(x_1+i_1, x_2+i_2, \cdots, x_k+i_k), (y_1+i_1, y_2+i_2, \cdots, y_k+i_k)$ 之间的格点 $(z_1+i_1, z_2+i_2, \cdots, z_k+i_k)$ 不是红点, 与染色规则矛盾.

所以, 第 j 类"最小顶点"是同一第 k 个维度方向格线上的连续 t_j 个红格点, 它们产生 t_j-1 个第 k 个维度方向的"单位红线段" $(1 \leq j \leq n-1)$.

考察其中任意一条单位红线段 A_iA_{i+1}, 设其端点 $A_i(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, i)$, $A_{i+1}(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, i+1)$ 分别是 $k-1$ 维红方格 G_i, G_{i+1} 的"最小"顶点.

由于 $A_i(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, i)$ 按第 k 个维度方向平移一个单位长度后得到 $A_{i+1}(x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, i+1)$, 所以 $k-1$ 维方格 G_i 按第 k 个维度方向平移一个单位长度后得到 G_{i+1}, 于是 $G_i \cup G_{i+1}$ 是 k 维红方格.

由此可见, 每条红单位线段 A_iA_{i+1} 至少对应一个 k 维红方格, 从而第 j 类最小顶点产生至少 t_{j-1} 个 k 维红方格. 所以,

$$\begin{aligned} f_k(p) &\geq \sum_{j=1}^{(n-1)^{k-1}} (t_j - 1) \\ &= \sum_{i=1}^{(n-1)^{k-1}} t_j - (n-1)^{k-1} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq p+n(n-1)^{k-1}-n^k-(n-1)^{k-1}\\
&=p+(n-1)(n-1)^{k-1}-n^k\\
&=p+(n-1)^k-n^k.
\end{aligned}
$$

又显然 $f_k(p)\geq 0$, 所以

$$f_k(p)\geq \max\{p+(n-1)^k-n^k,0\}.$$

下面只需构造一种染色, 使

$$f_k(p)=\max\{p+(n-1)^k-n^k,0\}.$$

当 $p=n^k$ 时, ω 中所有格点都被染红, 红单位立方体个数

$$f_k(p)=(n-1)^k=p+(n-1)^k-n^k,$$

结论成立.

当 $p\leq n^k-(n-1)^k$ 时, $\max\{p+(n-1)^k-n^k,0\}=0$.

令 $\pi_j=\{(x_1,x_2,\cdots,x_{j-1},1,x_{j+1},x_{i+2},\cdots,x_k)\mid x_i\in N,1\leq x_i\leq n,1\leq i\leq k,i\neq j\}$, $\pi=\pi_1\cup\pi_2\cup\cdots\cup\pi_k$, 则 $|\pi|=n^k-(n-1)^k$, 这是因为 π 以外的点构成 $(n-1)\times(n-1)\times\cdots\times(n-1)$ 点阵, 共有 $(n-1)^k$ 个点.

因为 $p\leq|\pi|$, 按"字典排序规则"依次将 p_i 中排列在前面的 p 个格点染红色. 所谓"字典排序规则"是指: 对任何两个不同点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_k),Q(y_1,y_2,\cdots,y_k)$, 设其对应分量不同的最小下标为 i, 即 $x_1=y_1,x_2=y_2,\cdots,x_{i-1}=y_{i-1}$, 而 $x_i\neq y_i$. 如果 $x_i<y_i$, 则 P 排在 Q 的前面。

显然， 按"字典排序规则"依次将 π 中排列在前面的 p 个格点染红色, 合乎"按格线不间断染色"的要求. 易知, 这 p 个红点不产生红色 k 维方格.

实际上, 对任何 k 维方格 $G=[x_1,x_2,\cdots,x_k]$, 其"最大"顶点 $(x_1+1,x_2+1,\cdots,x_k+1)$ 的任何分量都不为 1, 从而不属于 π, 所以其最大顶点不是红色.

此时, $f_k(p)=0=\max\{p+(n-1)^k-n^k,0\}$, 结论成立.

当 $n^k-(n-1)^k<p<n^k$ 时,

$$\max\{p+(n-1)^k-n^k,0\}=p+(n-1)k-n^k.$$

先将 π 中格点全部染红色, 进而对剩下的 $(n-1)^k$ 个格点组成的 $(n-1)\times(n-1)\times\cdots\times(n-1)$ 点阵, 按"字典排序规则"依次将排在前面的 $p+(n-1)^k-n^k$ 个格点染红色.

在染红 π 中全部格点后, 每继续染红一个格点, 便产生一个红色 k 维方格. 比如, 染红格点 $(2,2,\cdots,2,2)$, 产生唯一的红色 k 维方格 $[(1,1,\cdots,1,1)]$; 再染

红格点 $2,2,\cdots,2,3)$, 又产生唯一的红色 k 维方格 $[(1,1,\cdots,1,2)]$. 如此下去, 直至产生 $p+(n-1)^k-n^k$ 个红色 k 维方格.

此时,

$$f_k(p)=p+(n-1)^k-n^k=\max\{p+(n-1)^k-n^k,0\},$$

结论成立.

特别地, 对 $k=3$, 有 $f_3(p)$ 的最小值为 $\max\{p+(n-1)^3-n^3,0\}$, 所以

$$f_3(p)\geq p+(n-1)^3-n^3.$$

将题中数据 $p=(3n^2-3n+1)+k=n^3-(n-1)^3+k$ 代入, 可知

$$p+(n-1)^3-n^3=k,$$

故

$$f_3(p)\geq k,$$

这就是原题要证的结论. $\square$