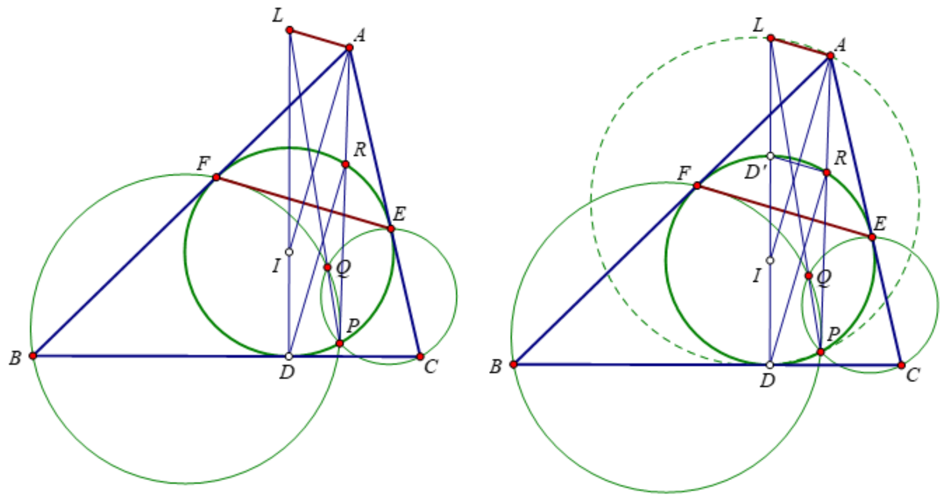
第 60 届 IMO 第六题的一个推广

林扬渊[1]　刘哲源[2]

(1. 山西大学初民学院, 030006; 2. 浙江省镇海中学, 315200)

本文给出今年第 60 届 IMO 第六题的一个推广.

问题 在锐角三角形 $\triangle ABC$ 中, I 是内心, $\triangle ABC$ 的内切圆 ω 与边 BC 和 CA, AB 分别相切于点 D, E 和 F. 过点 D 且垂直于 EF 的直线与 ω 的另一点交点为 R. 直线 AR 与 ω 的另一交点为 P. $\triangle PCE$ 和 $\triangle PBF$ 的外接圆交于另一点 Q. 证明: 直线 DI 和 PQ 的交点在过点 A 且垂直于 AI 的直线上.



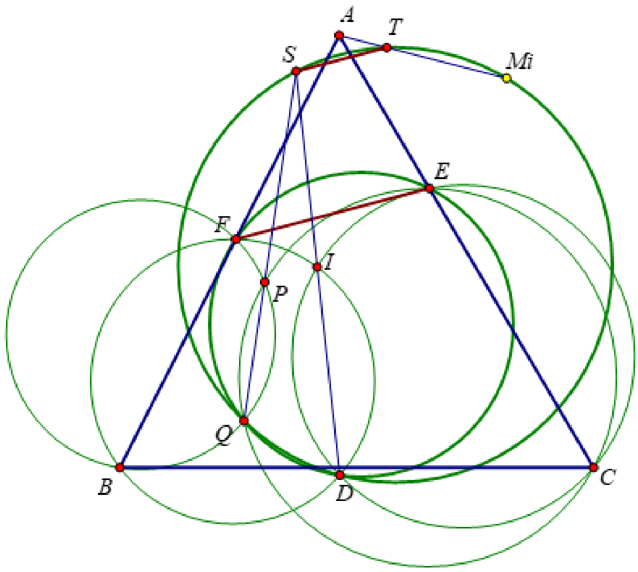
我们的推广可表述为:

推广 如下图, 已知 E, F 分别为 AC, AB 上的两定点, 给出平面上任一定点 I, 设 $\{I, D\} \equiv \odot(IFB) \cap \odot(IEC)$, Q 为 $\odot(DEF)$ 上一动点, $\{P, Q\} \equiv \odot(QFB) \cap \odot(QEC)$, $S \equiv PQ \cap ID$, 则

(1) $\odot(SDQ)$ 过一定点 Mi;

(2) 设 $\{T, Mi\} \equiv AMi \cap \odot(SDQ)$, $ST \parallel EF$.

修订日期: **2019-09-26.**

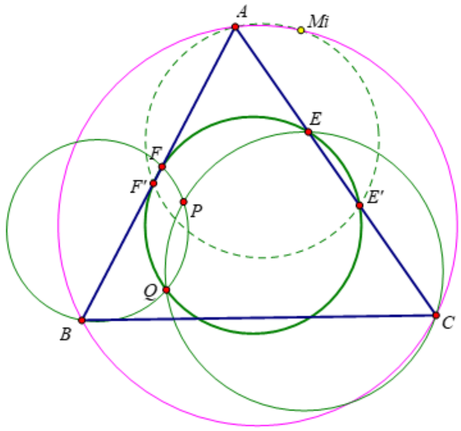


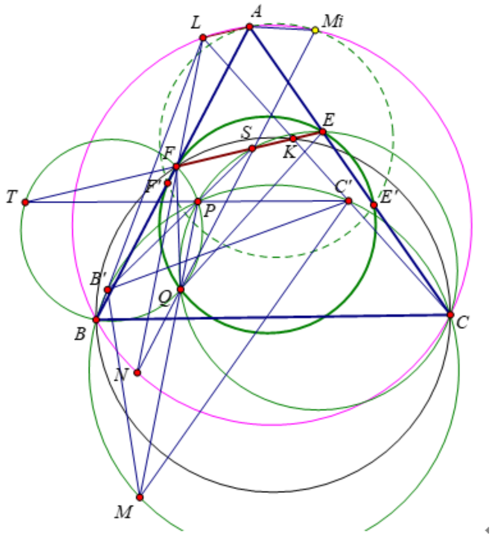
从如下角度考虑, 原问题与推广的关系几乎是显见的: 考虑原题, 设 D' 为 D 关于 ω 的对径点, 则 $D'R \parallel EF$, 结论即证 $AL \parallel EF$.

结合 Reim 定理我们只需证明 A, L, D, P 共圆, 而考虑推广结论, $AS \parallel EF \Leftrightarrow A, S, Q, D$ 共圆仅为特例 (即 $A \equiv T$ 时), 显然可保证原结论.

在证明推广前, 我们先给出如下构型的一些性质及其证明:

性质 给定 $\triangle ABC$, $E \in AC, F \in AB$, 点 P, Q 满足 $\{P, Q\} \equiv \odot(QFB) \cap \odot(QEC)$, 点 E', F' 满足 $\{E, E'\} \equiv AC \cap \odot(EFQ)$, $\{F, F'\} \equiv AB \cap \odot(EFQ)$, Mi 为完全四边形 $< AB, BE', CF', AC >$ 的 Miquel 点.





证明 设 $\{T, F\} \equiv EF \cap \odot(BPQ), \{S, E\} \equiv EF \cap \odot(CPQ)$, $\{B', P\} \equiv SP \cap \odot(BPC), \{C', P\} \equiv TP \cap \odot(BPC)$, $L \equiv BB' \cap CC'$, $K \equiv EF \cap CL$, $\{Mi, N\} \equiv$

$MiQ \cap \odot(ABC)$.

(i) $AL \parallel EF$. 注意到

$$\measuredangle FKL = \measuredangle ETC' + \measuredangle TC'L = \measuredangle FBP + \measuredangle PBC = \measuredangle ABC,$$

得 B, C, K, F 共圆, 故

$$\measuredangle AFE = \measuredangle BCL,$$

同理

$$\measuredangle LBC = \measuredangle FEA,$$

所以

$$\angle LBC \sim \angle AEF \sim \triangle AF'E' \sim \triangle LC'B', \tag{ψ}$$

同时 A, B, C, L 共圆, 对 $\odot(BCLA)$ 与 $\odot(BCKF)$ 应用 Reim 定理即得 $AL \parallel EF$.

(ii) $PQ \parallel LN$. 注意到

$$\measuredangle C'B'M = \measuredangle(C'T, PM) = \measuredangle(ET, FQ),$$

同理 $\measuredangle MC'B' = \measuredangle QEF$, 可得 $\triangle QEF \sim \triangle MC'B'$. 于是结合 ($\psi$) 可得

$$AEFE'F'Q \sim LC'B'CBM, \tag{*}$$

而由 Miquel 点的性质知 Mi 为 BF', CE' 的旋转位似中心, 故 Mi 也为 $(*)$ 的旋转位似中心.

于是

$$\measuredangle LNMi = \measuredangle LAMi \measuredangle(MQ, QMi),$$

故

$$PQ \parallel LN.$$

回到上述推广. 类似上述构型的定义得到 Mi, L, 设 $\{Mi, N\} \equiv MiQ \cap \odot(ABC)$, $\{Mi, K\} \equiv MiD \cap \odot(ABC)$, 由 (i),(ii) 得

$$PQ \parallel LN,\ ID \parallel LK,$$

所以

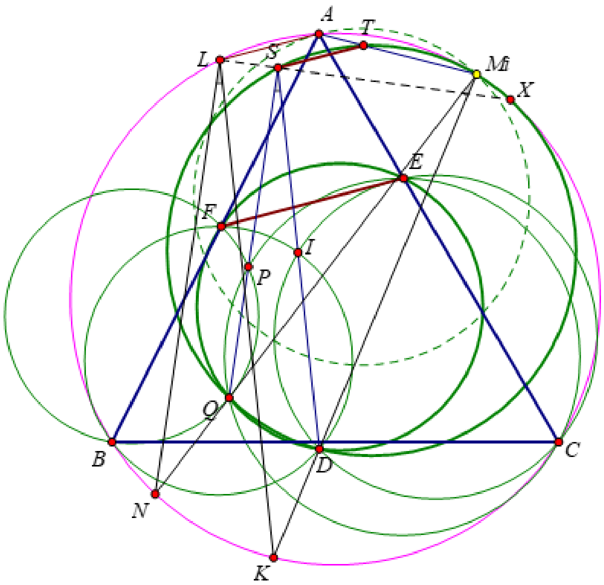
$$\measuredangle NLK = \measuredangle QSD = \measuredangle NMiK,$$

故定点 $Mi \in \odot(SDQ)$.

若设 $\{Mi, X\} \equiv \odot(SDQ) \cap \odot(ABC)$, $\{X, L'\} \equiv XS \cap \odot(ABC)$, 对 $\odot(MiQSX)$ 与 $\odot(MiNLK)$ 应用 Reim 定理得 $SQ \parallel L'N$. 故 $L \equiv L'$, 即 L, S, X 共线, 于是

对 $\odot(MiXLA)$ 与 $\odot(MiXST)$ 应用 Reim 定理即得

$$ST \parallel AL \parallel EF.$$



评注 我们避开原问题中对 Q 点的生硬处理, 从运动的角度考虑更一般性的构型, 利用 Miquel 点引申出的两个平行结论对 PQ 的方向重新刻画, 剩下的就是一些细节处理. 原问题解法甚多, 引入 Miquel 点的想法在 Aops 上亦有提及, 但进一步的推广及后面纯粹的导角证明却别具一格.