第 15 届沙雷金几何奥林匹克试题与解析

甘润知[1] 陈昱达[2] 张冠宇[3] 陈奕宸[4] 马飞雁[1]

(1. 华东师范大学第二附属中学, 201203; 2. 天津市第四中学, 300210;

3. 天津市第一中学, 300054; 4. 天津市南开中学, 300100)

1. 前言与致谢

炎热的七月, 第 15 届沙雷金 (Sharygin) 几何奥林匹克在俄罗斯举行. 沙雷金几何奥林匹克是为了纪念俄国数学家沙雷金, 从 2005 年开始每年举办一次的几何竞赛. 其包括两轮比赛: 通讯赛和决赛.

通讯赛没有确切的考试时间, 要求在 2018 年 12 月 1 日至 2019 年 3 月 1 日期间提交至相关网站, 参赛选手分为 8, 9, 10, 11 四个年级, 通过通讯赛的选手将受邀参加决赛. 决赛于 2019 年 7 月 30 日至 2019 年 7 月 31 日举行, 每一天考试时间都为 4 小时 (8:00-12:00), 每一天考试有 4 个题, 参赛选手分为 8, 9, 10 三个年级.

下面我们给出 8-10 年级决赛与 11 年级通讯赛的解答, 解答人姓名随解答给出. 同时感谢来自北京质心教育科技有限公司的杨丕业, 在我们撰写解答时提供宝贵的建议.

2. 试 题

2.1 决赛

题 8-1. 一个以 AB, CD 为底的梯形内接于 $\odot O$. 在 A 点作切线 AP, AQ 分别切 $\triangle CDO$ 的外接圆于 P, Q. 求证: $\triangle APQ$ 的外接圆经过 AB 的中点.

题 8-2. 点 M 位于 $\triangle ABC$ 内, 且 $AM = \frac{AB}{2}, CM = \frac{BC}{2}$. 点 C_0 和 A_0 分别在 AB 和 CB 上, 且 $BC_0 : AC_0 = BA_0 : CA_0 = 3$. 求证: $MC_0 = MA_0$.

题 8-3. 使用一块正方形板作一个正三角形. (你可以使用正方形板在距离不大于该正方形边长的两点间作一直线, 可以从一点向与其距离不超过该正方

投稿日期: 2019-10-11.

形边长的一条直线作垂线, 也可以在已作出的直线上取长度等于该正方形边长或对角线的线段.)

题 8-4. 锐角 $\triangle ABC$ 的外心和垂心分别为 O,H, 且 $AB < AC$. K 是 AH 的中点. OK 过 K 的垂线交 AB 于 X, 与 $\triangle ABC$ 过 A 的切线交于 Y. 求证: $\angle XOY = \angle AOB$.

题 8-5. 一个有 $45°$ 角的三角形已在正方形格纸中作出, 求其他角的度数.

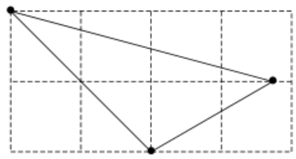

图 8-5

题 8-6. 点 H 位于正五边形 $ABCDE$ 的边 AB 上, 以 HE 为半径的 $\odot H$ 分别交线段 DE, CD 于 G, F. 已知 $DG = AH$. 求证: $CF = AH$.

题 8-7. 设 M, N 分别位于 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 BC 上, 且 $MN \parallel AC$. 点 M' 和 N' 分别为 M 和 N 关于 BC 和 AB 的对称点. $M'A$ 与 BC 交于 X, $N'C$ 与 AB 交于 Y. 求证: A, C, X, Y 共圆.

题 8-8. 求最小的正整数 k, 使得在每个凸 1001 边形中, 任意 k 条对角线长度之和大于等于剩下的对角线长度之和.

题 9-1. 在一个以 O 为顶点的直角内部有一 $\triangle OAB$, 且 $\angle A = 90°$. 过 A 作 $\triangle OAB$ 的高并将它反向延长, 交 $\angle O$ 于 M. M 和 B 与 $\angle O$ 另一条边的距离分别等于 2 和 1. 求 OA 的长度.

题 9-2. 点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 点 A_1 为 $\triangle PBC$ 的垂心关于 BC 垂直平分线的对称点. 类似地定义点 B_1 和 C_1. 求证: A_1, B_1, C_1 共线.

题 9-3. 圆内接四边形 $ABCD$ 中 $AD = BD = AC$. 点 P 是 $ABCD$ 外接圆 ω 上的一个动点. 直线 AP 和 DP 分别交 CD 和 AB 于 E, F. 直线 BE 和 CF 交于点 Q. 求 Q 的轨迹.

题 9-4. 一艘船试图在雾天靠岸. 船员们不知道海岸的方向. 他们在一个小岛上看到一座灯塔, 他们知道到灯塔的距离不超过 10 公里 (不知道确切的距离). 从灯塔到海岸的距离等于 10 公里. 灯塔被礁石包围, 所以船不能靠近它. 则船能否在航行不超过 75 公里的条件下靠岸? (海岸是一条直线, 船必须在航行

开始前给出路线, 然后自动驾驶仪根据路线航行.)

题 9-5. 圆外切四边形 $ABCD$ 内切圆的半径为 R. h_1 和 h_2 分别为 A 到 BC 和 CD 的距离. h_3 和 h_4 分别为 C 到 AB 和 AD 的距离. 求证:

$$\frac{h_1+h_2-2R}{h_1h_2}=\frac{h_3+h_4-2R}{h_3h_4}.$$

题 9-6. 一个非凸多边形中每三个连续顶点均可构成一个直角三角形. 则这个多边形是否总有一个角等于 90° 或 270°?

题 9-7. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆 ω 分别切 AC 和 AB 于 E 和 F. X,Y 位于圆上, 且'$\angle BXC=\angle BYC=90^\circ$ 求证: EF 和 XY 交于 $\triangle ABC$ 的一条中位线上.

题 9-8. 六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 任意四个顶点均不共圆, 且对角线 A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 共点. l_i 为圆 $A_iA_{i-1}A_{i+2}$ 和圆 $A_iA_{i+1}A_{i-2}$ 的根轴 (A_i 即为 A_{i+6}). 求证: l_i 共点, $i=1,\cdots,6$.

题 10-1. 给定 $\triangle ABC$, 且 $\angle A=45^\circ$. A' 为 $\triangle ABC$ 外接圆上点 A 的对径点. E 和 F 分别在线段 AB 和 AC上, 且 $AB=BE$, $A'C=CF$. K 为 $\triangle AEF$ 的外接圆和 $\triangle ABC$ 的另一交点. 求证: EF 平分 $A'K$.

题 10-2. 设 A_1, B_1, C_1 分别为 $\triangle ABC$ 边 BC, AC, AB 的中点. AK 为它的高, 其内切圆 γ 与 BC 切于 L. $\triangle LKB_1$ 的外接圆和 $\triangle A_1LC_1$ 的外接圆与直线 B_1C_1 的另一交点分别为 X 和 Y, 且 γ 交直线 B_1C_1 于 Z 和 T. 求证: $XZ=YT$.

题 10-3. 设 P 和 Q 为 $\triangle ABC$ 内的等角共轭点. $\triangle ABC$ 的外接圆为 ω. 设 A_1 为 ω 的 $\widehat{BC}$ 上一点, 且 $\angle BA_1P=\angle CA_1Q$. 类似地定义点 B_1 和 C_1. 求证: AA_1, BB_1, CC_1 共点.

题 10-4. 求证: 任意两条 Nagel 线长度之和大于该三角形的半周长. (三角形顶点与对应边与旁切圆切点连接的线段为 Nagel 线.)

题 10-5. 设 AA_1, BB_1, CC_1 分别为 $\triangle ABC$ 的三条高. A_0 和 C_0 分别为 $\triangle A_1BC_1$ 外接圆与直线 A_1B_1 和 C_1B_1 的交点. 求证: AA_0 和 CC_0 交于 $\triangle ABC$ 的一条中线上, 或都平行于它.

题 10-6. 锐角 $\triangle ABC$ 中, $AC>AB$, 且 AK 和 AT 分别为它的角平分线和中线. 直线 AT 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D. 点 F 是 K 关于 T 的对称点. 已知 $\triangle ABC$ 各内角大小, 求 $\angle FDA$ 的大小.

题 10-7. 设 P 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任意一点. K 为 $\triangle PAB$ 的内心.

$\triangle PAC$ 的内切圆切 BC 于 F. 点 G 在 CK上, 且 $FG \parallel PK$. 求 G 的轨迹.

题 10-8. 在空间中给定几个点和平面. 已知对于任意两个点, 都恰好有两个平面包含着它们, 并且每个平面包含着至少四个给定的点. 则是否所有给定的点都共线?

2.2 通讯赛

题 11-1. 单位圆 $\odot O$ 中内接了一锐角 $\triangle A_1A_2A_3$. 三条线段 A_iO 交对边于 $B_i(i=1,2,3)$.

(a) 求 B_iO 中最长线段长度的最小值;

(b) 求 B_iO 中最短线段长度的最大值.

题 11-2. 设 $\triangle ABC$ 的边 AC 分别切其内切圆和对应旁切圆于 K 和 L. 设 P 为 $\triangle ABC$ 内心在 AC 垂直平分线上的投影. 已知 $\triangle BKL$ 外接圆过 K 和 L 的两条切线交点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 求证: 直线 AB 和 BC 都与 $\triangle PKL$ 的外接圆相切.

题 11-3. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆 ω 分别切边 BC, CA, AB 于点 D, E, F. 过 E 的 DF 垂线交 BC 于点 X, 过 F 的 DE 垂线交 BC 于点 Y. 线段 AD 与 ω 的另一交点为点 Z. 求证 $\triangle XYZ$ 的外接圆与 ω 相切.

题 11-4. 设 AH_1 和 BH_2 分别为 $\triangle ABC$ 的高; 且其外接圆过 A 的切线交 BC 于 S_1, 过 B 的切线交 AC 于 S_2;T_1 和 T_2 分别为 AS_1 和 BS_2 的中点. 求证:T_1T_2, AB, H_1H_2 共点.

题 11-5. 给定三个圆 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$.$\omega_1$ 和 ω_2 交于 A_0 和 A_1,ω_2 和 ω_3 交于 B_0 和 B_1,ω_3 和 ω_1 交于 C_0 和 C_1. 设 $O_{i,j,k}$ 为 $\triangle A_iB_jC_k$ 的外心. 求证: 有着 $O_{i,j,k}O_{1-j,1-i,1-k}$ 形式的四条线共点或平行.

题 11-6. 四边形 $ABCD$ 外切于 $\odot I$. 且 $ABCD$ 对边不平行, 各边均不相等. 设 K, L, M, N 分别是 AB, BC, CD, DA 的中点. 已知 $AB \cdot CD = 4IK \cdot IM$. 求证:$BC \cdot AD = 4IL \cdot IN$.

题 11-7. 设 AL_a, BL_b, CL_c 为 $\triangle ABC$ 的三条角平分线. 过 B 点和 C 点的 $\triangle ABC$ 外接圆切线交于点 K_a, 类似地定义点 K_b, K_c. 求证: 直线 K_aL_a, K_bL_b, K_cL_c 共点.

题 11-8. 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,H 为它的垂心.M 为 AB 的中点, 直线

MH 交过 O 的 AB 平行线于 K, 且 K 位于 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 设 P 为 K 在 AC 上的投影. 求证:$PH \parallel BC$.

题 11-9. 给定一个椭圆 Γ 及一条给定的弦 AB. 求内接于 Γ 的 $\triangle ABC$ 垂心的轨迹.

题 11-10. 等腰 $\triangle ABC(AB = AC)$ 的高是 AA_0, 以 AA_0 的中点为圆心的圆 γ 与 AB 和 AC 相切.X 为直线 BC 上任意一点. 求证: 过点 X 向 γ 作的两条切线在直线 AB 和 AC 上所截的线段相等.

题 11-11. 在一平面内, 有 a, b 为两条封闭折线 (可能自交) 与 K, L, M, N 四个点.a, b 的顶点与点 K, L, M, N 的位置关系是平凡的 (即这些点既没有三点共线, 也没有以它们为端点的直线在内部共点).KL 和 MN 与 a 均有偶数个交点,LM 和 NK 与 a 均有奇数个交点. 相反,KL 和 MN 与 b 均有奇数个交点,LM 和 NK 与 b 均有偶数个交点. 求证:a 和 b 相交.

题 11-12. 两个单位正方体的中心相同. 是否总能将每个正方体的顶点从 1 到 8 编号, 使得每一对编号相同的顶点间距离不超过 $\frac{4}{5}$? 能否不超过 $\frac{13}{16}$ 呢?

3. 解答与评注

题 8-1. 一个以 AB, CD 为底的梯形内接于 $\odot O$. 在 A 点作切线 AP, AQ 分别切 $\triangle CDO$ 的外接圆于 P, Q. 求证: $\triangle APQ$ 的外接圆经过 AB 的中点.

解 8-1 (甘润知)

设 M为 AB的中点. 则我们只需要证明 $\angle AMO' = 90°$, 且 O'是 $\triangle CDO$的外心. 显然,$OO' \perp CD$, 则由 $AB \parallel CD$可得 $OO' \perp AB$. 注 意到 $OM \perp AB$, 则 $O'M \perp AB$. □

题 8-2. 点 M 位于 $\triangle ABC$ 内, 且 $AM = \frac{AB}{2}, CM = \frac{BC}{2}$. 点 C_0 和 A_0 分别在 AB 和 CB 上, 且 $BC_0 : AC_0 = BA_0 : CA_0 = 3$. 求证: $MC_0 = MA_0$.

解 8-2 (法一: 甘润知)

注 意到

$$AM^2 = AC_0 \cdot AB, \triangle AMC_0 \sim \triangle ABM,$$

则

$$MC_0 = \frac{1}{2}BM,$$

同理

$$MA_0 = \frac{1}{2}BM,$$

则

$$MC_0 = MA_0.$$

$\square$

(法二: 张冠宇)

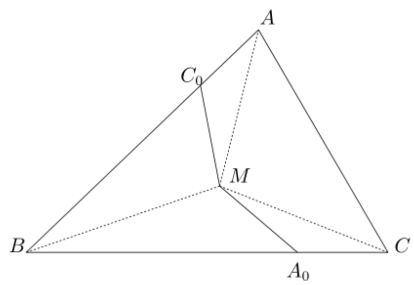

图 8-2

对 $\triangle AMB$ 使用 Stewart 定理, 得到

$$AM^2 \cdot BC_0 + BM^2 \cdot AC_0 - C_0M^2 \cdot AB = AC_0 \cdot BC_0 \cdot AB,$$

$$3AM^2 + BM^2 - 4C_0M^2 = 12AC_0^2.$$

又

$$AM = \frac{AB}{2} = 2AC_0,$$

则

$$C_0M = \frac{BM}{2}.$$

类似地对 $\triangle BMC$ 使用 Stewart 定理, 得到 $A_0M = \frac{BM}{2}$, 则 $A_0M = C_0M$. $\square$

题 8-3. 使用一块正方形板作一个正三角形. (你可以使用正方形板在距离不大于该正方形边长的两点间作一直线, 可以从一点向与其距离不超过该正方形边长的一条直线作垂线, 也可以在已作出的直线上取长度等于该正方形边长或对角线的线段.)

解 8-3 (陈昱达)

如左图, 用正方形板(图中大正方形)作出一个边长为它一半的小正方形(图中加粗的小正方形). 如右图, 可用小正方形作出一个边长为正方形板边长的等

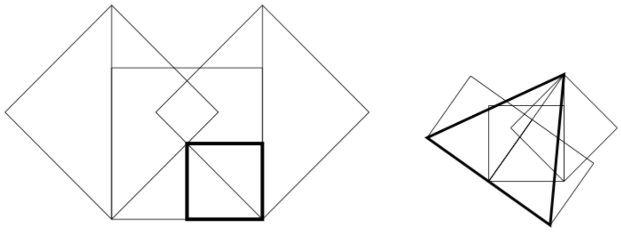

图 8-3

边三角形. (注: 左图先作出中间的正方形, 再作出两侧的正方形; 右图先作出水平的正方形, 再作出右侧竖立的正方形, 然后作出倾斜的正方形.) □

注 8-3: 本题是一个较有趣也较简单的作图题 , 结合勾股定理和三角函数可以轻松地想出其中的边角关系, 放到 8-3 比较合适.

题 8-4. 锐角 $\triangle ABC$ 的外心和垂心分别为 O,H, 且 $AB < AC$.K 是 AH 的中点.OK 过 K 的垂线交 AB 于 X, 与 $\triangle ABC$ 过 A 的切线交于 Y. 求证:$\angle XOY = \angle AOB$.

解 8-4: (甘润知)

设 BC 的中点是 M. 由于 $\angle OAY = \angle OKY = 90°$, 则 A,K,O,Y 共圆, 可知 $\angle XKH = \angle BOX$, 则 $\angle AOY = \angle BOX$, 则

$$\angle XOY = \angle AOB.$$

又知 $HM /\!/ OK, OM /\!/ AH$, 所以只需证明 $\triangle BOX \sim \triangle BMH$, 也就等价于证明

$$BX \cdot BM = BH \cdot BO.$$

注 意到

$$\angle XKA = \angle HMC, \angle XAH = \angle HCM,$$

又 K 为 AH 的中点, 则 $\triangle AKX \sim \triangle CMH$, 所以

$$AX = \frac{AK \cdot HC}{MC} = AB \cot A \cot C,$$

得

$$BX = (1 - \cot A \cot C)AB = \cot B(\cot A + \cot C)AB,$$

即

$$\sum_{\text{cyc}} \cot A \cot B = 1.$$

所以再需证明 $AH \cdot AB + CH \cdot BC = 2AC \cdot BO$ (即 $AH = BC \cot A$), 也就是

证明

$$2S_{\triangle AOC} = S_{ABCH},$$

即

$$AB\sin\angle ABH + BC\sin\angle CBH = AC$$

(也就是 BH 为 O 到 AC 距离的 2 倍), 而这是显然的. □

注 8-4: 本题是中等难度的几何题 , 笔者用的计算法比较简单直接, 思路也较为自然, 本题 也可以用纯几何法做, 一个关键点是证明 $\triangle OKX \sim \triangle CMO$, 在此不多解释, 读者可以自证.

题 8-5. 一个有 45° 角的三角形已在正方形格纸中作出, 求其他角的度数.

解 8-5: (张冠宇)

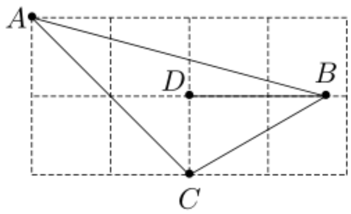

图 8-5

设 $\angle ABD = \alpha, \angle CBD = \beta, BD = x$. 则

$$\tan\alpha = \frac{1}{2+x}, \tan\beta = \frac{1}{x}$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = 1$$

$$\frac{1}{2+x} + \frac{1}{x} = 1 - \frac{1}{(2+x)x}$$

则可得$x = \sqrt{3}$, 所以$\tan\alpha = 2-\sqrt{3}, \tan\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$. 则

$$\angle A = 45^\circ - \alpha.$$

$$\tan\angle A = \tan(45^\circ - \alpha) = \frac{1-(\sqrt{3})}{1+2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

可得

$$\angle A = 30^\circ, \angle C = 105^\circ.$$

□

题 8-6. 点 H 位于正五边形 $ABCDE$ 的边 AB 上, 以 HE 为半径的 $\odot H$ 分别交线段 DE, CD 于 G, F. 已知 $DG = AH$. 求证: $CF = AH$.

解 8-6: (甘润知)

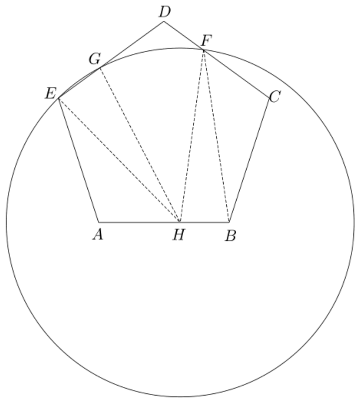

图 8-6

容易知道有且只有一个 F 满足题 目条件, 于是可以重新定义 F 为线段 CD 上一点, 满足 $CF = DG = AH$, 那么由 $ABCDE$ 是正五边形, 我们可以得到

$$\triangle CFB \cong \triangle AHE.$$

那么

$$HE = BF, \angle CBF = \angle AEH,$$

由 $\angle AED = \angle ABC$, 于是 $\angle FBH = \angle HEG$, 又由正五边形边长相等可以得到 $FD = EG = BH$, 结合 $HE = BF, \angle FBH = \angle HEG$, 可知:

$$\triangle HBF \cong \triangle GEH$$

故

$$HF = FB = HG = HE,$$

即 F 与原题的 F 重合. □

注 8-6: 本题不难, 原题中的 F 很难处理, 所以很自然的一个想法就是重新定义 F 的位置, 然后由正五边形的一些角相等, 结合全等三角形, 便可得到结论.

题 8-7. 设 M, N 分别位于 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 BC 上, 且 $MN \parallel AC$. 点 M' 和 N' 分别为 M 和 N 关于 BC 和 AB 的对称点. $M'A$ 与 BC 交于 $X, N'C$ 与 AB 交于 Y. 求证: A, C, X, Y 共圆.

解 8-7: (陈昱达)

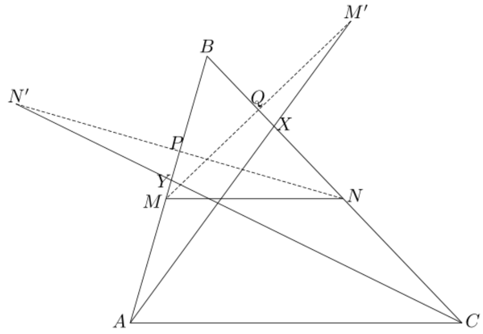

图 8-7

设 NN' 交 AB 于 P,MM' 交 BC 于 Q. 本题需证明 $\angle BAX = \angle BCY$. 由于 $S_{\triangle ABN} = S_{\triangle CBM}$, 则

$$AB \cdot NN' = CB \cdot MM', \ \frac{AB}{CB} = \frac{MM'}{NN'} = \frac{AM}{CN},$$

可知 $\angle PMQ = \angle PNQ$, 则

$$\angle M'MA = \angle N'NC,$$

又

$$\frac{MM'}{NN'} = \frac{AM}{CN},$$

则

$$\triangle MM'A \sim \triangle NN'C,$$

可知

$$\angle BAX = \angle BCY.$$

□

注 8-7: 本题比较简单, 本题 通过观察即可发现四点共圆与三角形的相似, 而通过简单的导角便可以证明出结果.

题 8-8. 求最小的正整数 k, 使得在每个凸 1001 边形中, 任意 k 条对角线长度之和大于等于剩下的对角线长度之和.

解 8-8: (陈奕宸-陈昱达)

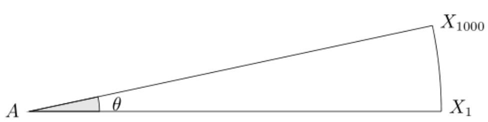

图 8-8.1

首先我们说明 $k \geq 499000$. 我们构造一个如图的凸 1001 边形. 取一顶点 A, 以 A 为圆心,$AX_1 = 1$ 为半径, 作一个圆心角为 θ 的扇形 X_1AX_{1000}, 其中 θ 趋近于 0, 在 $\widehat{X_1X_{1000}}$ 上任取 998 个点 $X_2, X_3, X_4, ..., X_{999}$, 构成凸 1001 边形 $AX_1X_2...X_{1000}$. 在该 1001 边形中, 共 $\frac{1001 \cdot 998}{2} = 499499$ 条对角线, 若 $k \leq 498999$, 则可以取以下的 498999 条对角线:$AX_i(i = 2, 3, ..., 499)$ 与 $X_iX_j(1 \leq i < j \leq 1000$ 且 $j - i \geq 2)$, 这些对角线长度之和为 $498 + \epsilon$, 其中 ϵ 可以无限小, 而剩余对角线为 $AX_i(i = 500, 501, ..., 999)$, 其长度之和为 500, 与题设矛盾, 故 $k \geq 499000$.

下证 $k = 499000$合题 .

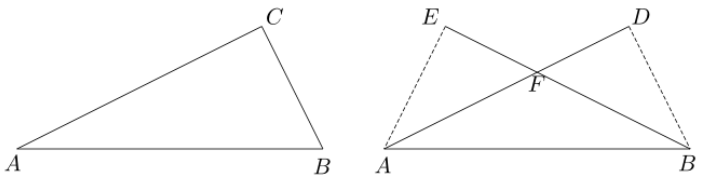

图 8-8.2

我们将剩余的 499 条对角线染为绿色, 我们下面依次对这 499 条对角线执行操作 P. 我们定义操作 P, 对于一条对角线 AB, 我们找到两条未染色的对角线使其满足下列两个条件之一: 1. 这两条对角线有一个公共顶点 C, 且为 AC 和 BC; 2. 这两条对角线为 AD 和 BE, 其中 D, E 为两个不同顶点, 且 AD 与 BE 相交, AE, BD 均为凸 1001 边形的边, 我们将这两条对角线染为红色.

显然进行完操作 P 后, 新染红的两条对角线长度和为 $AC + CB > AB$ 或 $AD + BE > AF + BF > AB$, 故对对角线 AB 进行操作后, 新染红的两条对角线长度之和必定大于 AB, 若该操作对这 499 条对角线均进行后, 我们得到了 998 条互不相同的红色对角线, 即这 998 条红色对角线的长度之和大于 499 条绿色对角线的长度之和, 则 $k = 499000$ 合题 .

下面我们证明操作P可对全部的 499 条对角线进行, 假设我们已经对 $i(0 \leq i \leq 498)$ 条对角线执行了此操作, 我们设下一条将要被操作的对角线为 A_i, B_i, 我们考虑一个由对角线构成的集合是 M_i,M_i 为以 A_i 或 B_i 为一个端点且不为 A_iB_i 的所有对角线构成的集合. 由于 A_i,B_i 各引出 1001-3=998 条对角线, 故 $|M_i| = 2 \times (998 - 1) = 1994$. 我们考查 M 中已被染色的对角线的条数, 首先对于已操作的对角线 $A_kB_k(0 \leq k \leq i - 1)$, 在 A_kB_k 和对 A_kB_k 进行的操作染红的对角线中, 至多有两条属于 D, 这是因为, 在 D 中的三角形必包含边 A_iB_i, 故不存在边 A_kB_k, A_kC_k, B_kC_k 构成的三角形, 而 D 中除 A_iB_i 外每点的度至多为

2, 若这三条对角线为 A_kB_k, A_kD_k, B_kE_k, 则 A_kB_k 必以 A_iB_i 之一为端点, 不妨设 $A_k = A_i$, 则 $B_k \neq B_i$, 设 $B_k = B_j$, 因为 B_j 在 M_i 中仅连出了边 B_jA_i, B_jB_i, 又 $E_k \neq A_i$ (否则 $E_k = B_k$), 故 $E_k = B_i$, 则 $A_kE_k = A_iB_i$ 为一条对角线, 这与 A_kB_k 为一条凸 1001 边形的边矛盾, 其次还有 499-(i+1)=498-i 条未进行操作的绿色对角线, 故 M_i 中至多有 $2i + [499 - (i+1)] = i + 498$ 条已被染色的对角线, 故M_i 中至少有 1994-(498-i)=1496-i 条未被染色的对角线.

当 $i \leq 498$ 时, 有 1496-i $\geq$998, 故 M_i 中至少有 998 条未被染色的对角线, 设其构成的集合为 N_i, 有 $|N_i| \geq 998$, 因为 M_i 中除 A_i, B_i 外有 999 个不同的点, 若 N_i 中有两条线段具有除 A_i, B_i 外的端点 C_i, 则可将 A_iC_i, B_i, C_i 染红, 若 N_i 中任两条线段除 A_i, B_i 外均无公共端点, 我们分以下两种情况考虑.

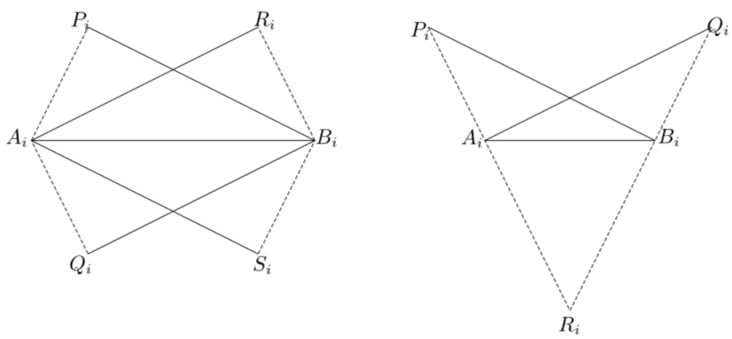

图 8-8.3

若 A_iB_i 的两侧有边 A_iP_i, A_iQ_i, B_iR_i, B_iS_i, 因为在 M_i 中 P_i, Q_i, R_i, S_i 均仅有一条对角线引出, 因为 $|E_i| = 998$, 故要么 B_iP_i, A_iR_i 均属于 E_i, 要么 A_iS_i, B_iQ_i 均属于 E_i, 可将 B_iP_i, A_iR_i 染红, 或 A_iS_i, B_iQ_i染红, 此操作可进行.

若 A_iB_i 两侧存在同一点 R_i, R_iA_i, R_iB_i 为边, 则 M_i 的边中仅包含除 R_i 外的 1000 个顶点, 故 E_i 中包含从除了 A_i, B_i, R_i 外所有的点, 故 $P_iB_i, A_iQ_i \in E_i$, 可将这两条染红, 此操作可进行. 故对于任意 $0 \leq i \leq 498$, 均可对 A_iB_i 进行操作 P, 即 $k = 499000$ 合题 . $\square$

注 8-8: 评析本题的难度较高, 考察了平面几何知识与组合知识的综合运用. 本题答案是易猜的, 只需考虑极端情况, 这种题的极端情况, 无非是正 1001 边形与对角线长度相差悬殊的凸 1001 边形, 稍微试验使可猜得 k 的值为 499000. 而论述的过程较为繁琐, 笔者首先对凸 5, 7, 9 边形等边数较小的多边形进行试验, 从而发现了利用三角不等式的关键思路. 便可顺理成章的想出要对剩余的 499 条对角线进行了类似于与一些选出的对角线匹配的过程, 当然本题的论述还是较为繁琐的. 事实上本题是由 Balkan Combinatorial Problem 6

改编而来的.

题 9-1. 在一个以 O 为顶点的直角内部有一 $\triangle OAB$, 且 $\angle A = 90°$. 过 A 作 $\triangle OAB$ 的高并将它反向延长, 交 $\angle O$ 于 M.M 和 B 与 $\angle O$ 另一条边的距离分别等于 2 和 1. 求 OA 的长度.

解 9-1: (甘润知)

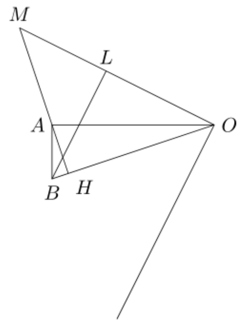

图 9-1

设高线交OB于H,L为B在直线OM上的投影. 则B, H, L, M四点共圆. 所以

$$OA^2 = OH \cdot OB = OL \cdot OM = 1 \cdot 2 = 2$$

则$OA = \sqrt{2}$. □

题 9-2. 点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 点 A_1 为 $\triangle PBC$ 的垂心关于 BC 垂直平分线的对称点. 类似地定义点 B_1和C_1. 求证:A_1, B_1, C_1共线.

解 9-2: (甘润知)

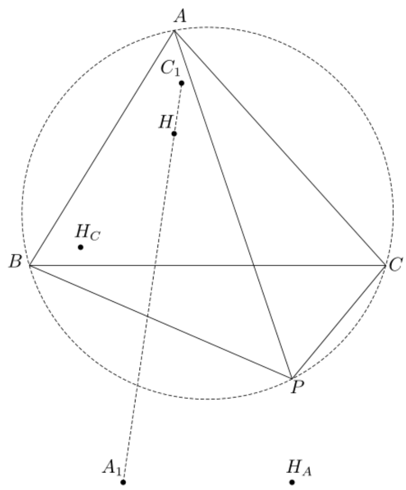

图 9-2

定义 $\triangle ABC$的垂心是H.$\triangle PBC, \triangle PAB$的垂心分别为$H_A, H_C$, 只需要证明$H, A_1, C_1$共线即可. 注 意到$\angle BHC = 180° - \angle BA_1C$故$H, B, A_1, C$共圆. 类似

地H,A,B,C_1共圆. 故

$$\angle BHA_1=\angle BCA_1=\angle CBH_A=90^\circ-\angle BCP$$

$$\angle BHC_1=180^\circ-\angle BAC_1=180^\circ-\angle ABH_C=90^\circ+\angle BAP=90^\circ+\angle BCP$$

故

$$\angle BHA_1+\angle BHC_1=180^\circ.$$

即A_1,H,C_1共线. 故进一步可知A_1,B_1,C_1,H共线. □

注 9-2: 证明三点共线的一个常用方法就是找到第四个点与这三点共线, 在本题 中, 注 意到本题 的诸多垂心, 由对称性可以想到构造$\triangle ABC$的垂心, 于是本题便可不攻自破了.

题 9-3. 圆内接四边形$ABCD$中$AD=BD=AC$. 点P是$ABCD$外接圆ω上的一个动点. 直线AP和DP分别交CD和AB 于E,F. 直线BE和CF交于点Q. 求Q的轨迹.

解 9-3: (甘润知)

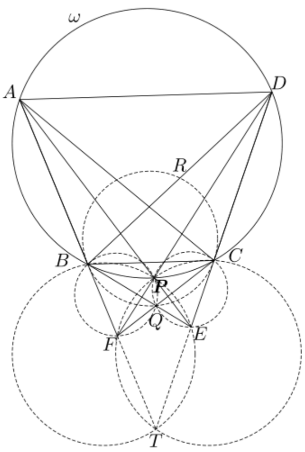

图 9-3

如图所示, 假设 P在$\widehat{BC}$上, 在其他位置类似, 注 意到 $AD=AC=BD$及四边形 $ABCD$是等腰梯形, 则

$$\angle DAB=\angle DBA=\angle DCA.$$

设AB交CD于T,R是线段 BD上一点, 使得 $BC=BR$, 我们来证明Q在$\triangle BRC$的外接圆上. 注 意到

$$\angle APB=\angle ADB=180^\circ-2\angle BAD=180^\circ-\angle BAD-\angle ADC=\angle T$$

于是 B,P,E,T 四点共圆, 同理可得 C,P,F,T 也共圆, 则 P 是完全四边形 $FTECQB$ 的 Miquel 点, 那么 B,Q,P,F 四点共圆, 则

$$\angle FQB=\angle FPB=\angle BAD=\angle BRC$$

即 Q 在 $\triangle BRC$ 的外接圆上. 最后一步是因为等腰 $\triangle DAB$ 与等腰 $\triangle BRC$ 相似. 故是 Q 的轨迹是 $\triangle BRC$ 的外接圆. □

注 9-3: 本题的一个关键是联想到完全四边形的 Miquel 点, 事实上, 通过命题 的转化, 我们就知道最后要证明的就是 $\angle BRC$ 是定值, 定值的大小很容易猜到是 $\angle DCA$, 这又等价于证明 B,Q,P,F 四点共圆, 最后通过 Miquel 点便可得到这个重要结论. 本题不简单, 也不难, 但想法有些巧妙, 放在 9 年级的第 3 题是恰如其分的.

题 9-4. 一艘船试图在雾天靠岸. 船员们不知道海岸的方向. 他们在一个小岛上看到一座灯塔, 他们知道到灯塔的距离不超过 10 公里(不知道确切的距离). 从灯塔到海岸的距离等于 10 公里. 灯塔被礁石包围, 所以船不能靠近它. 则船能否在航行不超过 75 公里的条件下靠岸? (海岸是一条直线, 船必须在航行开始前给出路线, 然后自动驾驶仪根据路线航行.)

解 9-4: (甘润知)

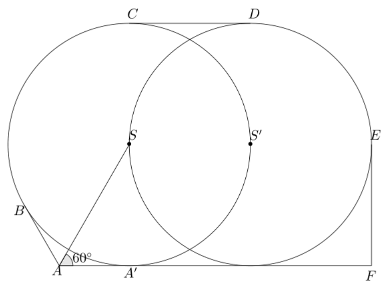

图 9-4

答案是肯定的, 接下来阐述构造. 设 S 是船现在所在地,S' 是海洋上一点, 满足灯塔在线段 SS' 上, 且 $SS'=10\,\mathrm{km}$. 分别以 S 和 S' 为圆心作半径为 $10\,\mathrm{km}$ 的圆,CD 是外公切线, 如答案图9-4所示.E 是射线 SS' 与 $\odot S'$ 的另一个交点,A' 是 C 的关于 $\odot S$ 的对径点. 直线 AA' 与 $\odot S'$ 和 $\odot S$ 均相切且 $\angle SAA'=60°$, AB 是 $\odot S$ 的另一条切线 (不同于 AA').F 是射线 AA' 上的一点满足 $EF\perp AA'$, 显然曲线 $SABCDEF$ 符合题 意. 其长度为

$$\begin{aligned}l&=\frac{10\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{km}+\frac{20\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{km}+\frac{20\pi}{3}\,\mathrm{km}+10\,\mathrm{km}+\frac{20\pi}{4}\,\mathrm{km}+10\,\mathrm{km}\\&<10\times1.74\,\mathrm{km}+20\,\mathrm{km}+3.2\times20\times\frac{7}{12}\,\mathrm{km}<75\,\mathrm{km}\end{aligned}$$

故符合题意. 即答案是肯定的. □

注 9-4: 这个题目是一个有一些难度的题 , 很容易想到要先往外走 10 km, 但不知道往哪里走,按照最简单的放缩就是远离灯塔往后退 10 km再画一个 $\frac{2}{3}$ 圆, 这样一算明显大于 75 公里, 之后想到了答案图 9-4, 很多人第一个思路是曲线 $SA'BCDEF$, 这样算出来答案是 77 公里, 之后才会想到曲线 $SABCDEF$, 问题 就被解 决了. 本题 的构造不简单, 放在 9 年级第 4 题 是很恰当的.

题 9-5. 圆外切四边形 $ABCD$ 内切圆的半径为 $R.h_1$ 和 h_2 分别为 A 到 BC 和 CD 的距离. h_3 和 h_4 分别为 C 到 AB 和 AD 的距离. 求证:

$$\frac{h_1+h_2-2R}{h_1h_2}=\frac{h_3+h_4-2R}{h_3h_4}.$$

解 9-5: (甘润知)

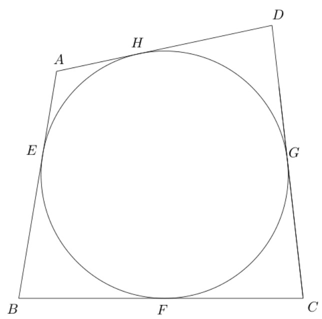

图 9-5

设内切圆切 AB,BC,CD,DA 于 E,F,G,H. 设 $AE=AH=a,BE=BF=b,CF=CG=c,DG=DH=d$. 则

$$h_1(b+c)+h_2(c+d)=2S_{ABCD}=h_3(a+b)+h_4(a+d)=2R(a+b+c+d)$$
$$\frac{h_1(b+c)+h_2(c+d)}{a+b+c+d}=\frac{h_3(a+b)+h_4(a+d)}{a+b+c+d}$$

代入待证式中, 则只需要证明

$$\frac{h_1(a+d)+h_2(a+b)}{h_1h_2}=\frac{h_3(c+d)+h_4(b+c)}{h_3h_4}$$

即

$$\frac{AD}{h_2}+\frac{AB}{h_1}=\frac{CD}{h_4}+\frac{CB}{h_3}$$

即

$$\csc\angle D+\csc\angle B=\csc\angle D+\csc\angle B.$$

而这是显然的. □

注 9-5: 四边形的内切圆半径与三角形内切圆半径类似, 都可以用面积与边

长表示, 注 意到 S 可以用 H_1H_2 或 H_3H_4 乘以四边长来表示, 否则 R 就很难被表示清晰, 接下来便可以迎刃而解 了.

题 9-6. 一个非凸多边形中每三个连续顶点均可构成一个直角三角形. 则这个多边形是否总有一个角等于 $90°$ 或 $270°$?

解 9-6: (甘润知)

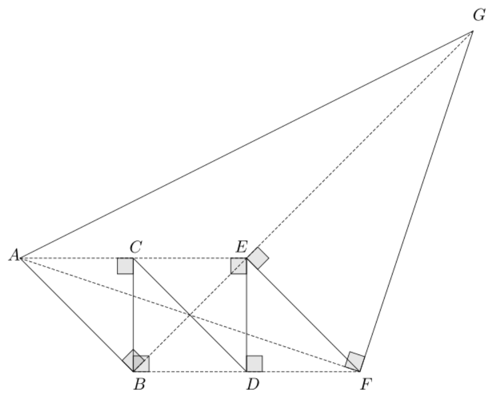

图 9-6

答案是否定的. 令

$$\angle ACB=\angle CBD=\angle CED=\angle EDF=\angle GEF=\angle AFG=\angle GAB=90°,$$

$$AB=CD=EF=\sqrt{2},\ FD=ED=1,\ GF=\sqrt{10},\ AG=2\sqrt{5},\ EG=2\sqrt{2}.$$

显然这个七边形 $ABCDEFG$ 符合题 设. 但任意一个角不为 90°或270°. 故答案是否定的. □

注 9-6:本题是一个偏易难度的题 , 特殊角若不为 90 度就会想到使某些角为 45 度 60 度的想法, 先用使某些角变为 45 度的想法, 尝试一下便可以得到图示的想法, 本题唯一的考点就是构造与论证.

题 9-7. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆 ω 分别切 AC 和 AB 于 E 和 $F.X,Y$ 位于圆上, 且 $\angle BXC=\angle BYC=90°$. 求证:$EF$ 和 XY 交于 $\triangle ABC$ 的一条中位线上.

解 9-7: (甘润知)

设 AB,AC的中点分别是 $M,N.BC$ 中点为 A_0,$\triangle ABC$ 内心为 I. 设 BI,CI 交以 BC 为直径的 $\odot A_0$ 于 Q,P. 则

$$\angle IQC=\angle IEC=90°,$$

可知I,E,Q,C四点共圆. 则

$$\angle QEA=\angle QIC=90°-\frac{\angle A}{2}=\angle AEF,$$

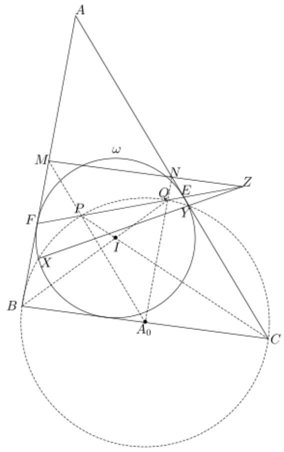

图 9-7

可得 E, F, Q 共线.

类似地,E, F, P共线. 设 Z 为 EF 和 MN 的交点. 则只需要证明

$$ZE \cdot ZF = ZP \cdot ZQ$$

即可. 注 意到

$$\angle QA_0C = 2\angle QBC = \angle ABC = \angle NA_0C,$$

可得Q, N, A_0共线.

类似地 P, M, A_0 共线. 故 $\angle PFM = \angle AFE = \angle AEF = \angle MPF$ (中位线 $MPA_0 \parallel AC$). 于是 $PM = MF$. 类似地 $EN = NQ$. 故由

$$MPA_0 \parallel AC, NQA_0 \parallel AB$$

知

$$\frac{ZP}{ZE} = \frac{PM}{EN} = \frac{MF}{QN} = \frac{ZF}{ZQ},$$

$$ZP \cdot ZQ = ZE \cdot ZF.$$

则 Z 在 ω 与 $\odot A_0$ 的根轴上, 即 Z, X, Y 共线. □

注 9-7: 本题是一个中等难度的题 , 注 意到对称性,Z肯定在平行于BC的中位线上, 之后必然用同一法, 显然XY不好处理, 但XY是根据, 故可以设EF 与中位线MN交于Z,之后便可以顺水推舟了.

题 9-8. 六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 任意四个顶点均不共圆, 且对角线 A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 共点. l_i 为圆 $A_iA_{i-1}A_{i+2}$ 和圆 $A_iA_{i+1}A_{i-2}$ 的根轴 (A_i 即为 A_{i+6}). 求证: l_i 共点, $i = 1, \cdots, 6$.

解 9-8: 只需证明 l_1, l_2, l_3 共点即可. 将 A_i 的坐标记为 (x_i, y_i), 将过 $A_iA_jA_k$

的圆的圆心记作 O_{ijk}, 其坐标记作 (x_{ijk}, y_{ijk}).

我们先固定 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. 记 $A_1A_4 \cap A_2A_5 = B$, 则 A_6 在直线 A_3B 上. 于是我们可用一个参数 t 来标定 A_6 的坐标, 且 $x_6(t), y_6(t)$ 都是一次函数. (比如, 我们可设 $B = (0, 0)$, $A_3 = (-1, 0)$, 那么 A_6 就可设为 $(t, 0)$.)

由于 A_1, A_3 是固定的, 于是 A_1A_3 的中垂线是固定的, 而 A_3A_6 的中垂线方程是一个带线性参数 t 的一次函数, 所以 O_{136} 的坐标关于 t 是一个一次函数, 即 $x_{136}(t), y_{136}(t)$ 都是一次函数.

由于 A_1, A_2, A_5 是固定的, 则 O_{125} 是固定的, 那么 $O_{125}O_{136}$ 的斜率

$$k = \frac{y_{136}(t) - y_{125}}{x_{136}(t) - x_{125}}$$

是一个一次分式函数. 而 l_1 的斜率

$$k_1 = -\frac{1}{k}$$

且 l_1 过定点 A_1, 则 l_1是一根带线性参数 t 的直线, 即

$$(x - x_1)(x_{136}(t) - x_{125}) + (y - y_1)(y_{136}(t) - y_{125}) = 0.$$

同理, l_2 也是一根带线性参数 t 的直线, 则 l_1l_2 的交点 P 的坐标 $(x_p(t), y_p(t))$ 应该是一个关于 t 的二次分式函数.

由于现在 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 都是固定的, 所以 l_3 是固定的.不妨设 l_3 的方程为 $ax + by + c = 0$, 那么我们考虑函数

$$f(t) = ax_p(t) + by_p(t) + c,$$

这个函数也是一个二次分式, 所以我们只需证明在五个不同的 t 值上 $f(t)$ 都是零, 即可证明这就是一个零多项式,即 P 在 l_3 上.

当 $t \to \pm\infty$时, $\odot O_{136}$ 退化为 A_1A_3, 则 l_1 退化为 A_1A_3.

同理 l_2 退化为 A_2A_3, 所以 $P = A_3$, 即 $f(t) = 0$.

当 $A_2A_3A_5A_6$ 共圆时, 由于 l_1 是 $\odot O_{125}$ 和 $\odot O_{136}$ 的根轴, 而 A_2A_5 是 $\odot O_{125}$ 和 $\odot O_{2356}$ 的根轴,A_3A_6 是 $\odot O_{136}$ 和 $\odot O_{2356}$ 的根轴, 所以由根心定理,l_1, A_2A_5, A_3A_6 共点, 即 $l_1 = A_1B = A_1A_4$.

而另一方面由于 l_2 是 $\odot O_{2356}$ 和 $\odot O_{124}$ 的根轴,l_3 是 $\odot O_{2356}$ 和 $\odot O_{134}$ 的根轴, 而 A_1A_4 是 $\odot O_{124}$ 和 $\odot O_{134}$ 的根轴, 所以在由根心定理,l_2, l_3, A_1A_4 共点, 即 l_1, l_2, l_3 共点, 所以这个时候 $f(t) = 0$.

当 $A_1A_3A_4A_6$ 共圆时, 同理也有 $f(t) = 0$.

当 $A_1A_2A_3A_6$ 共圆时, 显然 l_1, l_2 都与 A_1A_2 重合, 所以 l_1, l_2, l_3 交于一点.

由于 A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 任意四点不共圆, 所以上面分类讨论的三种情况中

的 t 不同. 故我们证明了 $f(t)\equiv 0$, 即 l_1,l_2,l_3 共点. □

注 9-8: 本题是一道较难的题 , 答案中给出的方法是射影几何, 但笔者认为该方法不易想到, 故将几何和代数结合, 得出结论.

题 10-1. 给定 $\triangle ABC$, 且 $\angle A=45^\circ$.A' 为 $\triangle ABC$ 外接圆上点 A 的对径点.E 和 F分别在线段 AB 和 AC上, 且 $A'B=BE$,$A'C=CF$.K 为 $\triangle AEF$ 外接圆和 $\triangle ABC$ 外接圆的另一交点. 求证:EF平分$A'K$.

解 10-1: (甘润知-陈昱达)

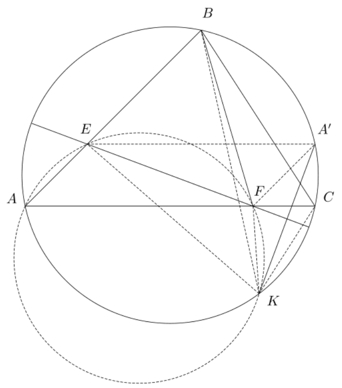

图 10-1

已知 $\angle A'FC=\angle A'EB=45^\circ$, 所以 $A'F//AB,A'E//AC$, 则 $\angle FA'E=\angle CAB=45^\circ$.

注 意到 K,F,E,A 四点共圆, 则 $\triangle KFC\sim\triangle KEB$. 又由于 $\triangle A'CF$ 和 $\triangle A'EB$ 均为等腰直角三角形, 得出

$$\frac{KF}{KE}=\frac{FC}{EB}=\frac{FA'}{EA'},$$

再注 意到

$$\angle FA'E=\angle CAB=\angle FKE,$$

则

$$\triangle KFE\sim\triangle A'FE,$$

又 $EF=EF$, 于是 $A'F=KF,KE=A'E$, 则 EF 平分 $A'K$. □

题 10-2. 设 A_1,B_1,C_1 分别为 $\triangle ABC$ 边 BC,AC,AB 的中点.AK 为它的高, 其内切圆 γ 与 BC 切于 L.$\triangle LKB_1$ 的外接圆和 $\triangle A_1LC_1$ 的外接圆与直线 B_1C_1 的另一交点分别为 X 和 Y, 且 γ交直线 B_1C_1 于 Z 和 T. 求证: $XZ=YT$.

解 10-2: (甘润知)

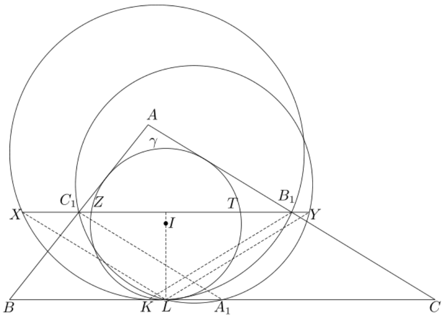

图 10-2

设 $\triangle ABC$ 的内心为 I. 注 意到 A_1, B_1, C_1 是 $\triangle ABC$ 各边中点, 则

$$B_1C_1 \parallel BC, C_1A_1 \parallel CA.$$

由 $AK \perp BC, B_1$ 是 AC 中点得 $B_1K = B_1C$. 结合已知, 得

$$\angle BA_1C_1 = \angle C = \angle B_1KC.$$

注 意到 A_1, C_1, Y, L 共圆,B_1, K, L, X 共圆. 故

$$\angle LXY = \angle B_1KC = \angle BA_1C_1 = \angle LYX,$$

则 $LX = LY$. 又 $IL \perp BC$,$BC \parallel B_1C_1$. 故 $IL \perp XY$. 结合 $LX = LY$ 可得 IL 平分 XY. 又 γ 交 B_1C_1 于 Z, T. 由 $ZI = IT$,$IL \perp BC, BC \parallel B_1C_1$, 可得 $IL \perp ZT$. 则 IL 平分 ZT. 结合 IL 平分 XY, 易知 $XZ = YT$. □

注 10-2: 本题是一个简单题 , 比预期的高一第2题 要简单, 这题 抛去那些繁琐的证明, 可以用一句话概括本题的思路, 就是: 由对称性, 易证.

题 10-3. 设 P 和 Q 为 $\triangle ABC$ 内的等角共轭点.$\triangle ABC$ 的外接圆为 ω. 设 A_1 为 ω 的 $\widehat{BC}$ 上一点, 且 $\angle BA_1P = \angle CA_1Q$. 类似地定义点 B_1 和 C_1. 求证:AA_1, BB_1, CC_1 共点.

解 10-3: (甘润知)

设 BQ, CP 交于 R,$\triangle BPR, \triangle CQR$ 的外接圆的另一交点为 A_2. 由 P, Q 是等角共轭点得

$$\angle BA_2C = \angle BA_2R + \angle CA_2R = (180^\circ - \angle BPC) + (180^\circ - \angle BQC)$$

$$\angle BA_2C = \angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A.$$

故 A, B, C, A_2 共圆且

$$\angle BA_2P = \angle BRP = \angle CRQ = \angle CA_2Q.$$

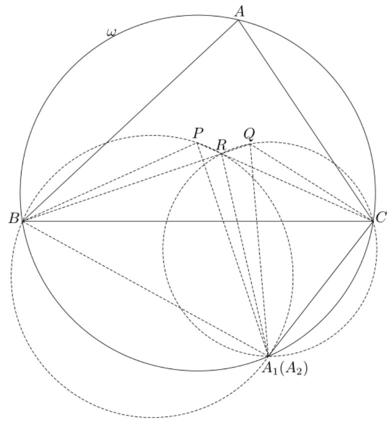

图 10-3

若 A_1 在圆 ω 的 $\widehat{BA_2}$ (不含 B, A_2) 上, 则

$$\angle BA_1P > \angle BA_2P = \angle CA_2Q > \angle CA_1Q$$

矛盾! 类似地可知 A_1 不在 $\widehat{CA_2}$ (不含 C, A_2) 上. 故 A_2 与 A_1 重合. 故

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA_1}{A_1P} \cdot \frac{A_1P}{A_1C} = \frac{BQ}{PC} \cdot \frac{BP}{CQ}.$$

这是由于

$$\triangle A_1BQ \sim \triangle A_1PC(\angle A_1BQ = \angle A_1PC, \angle BQA_1 = \angle PCA_1).$$

类似地得到三式, 将三式相乘可知

$$\frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AC_1}{C_1B} = 1.$$

由角元 Ceva 定理知 AA_1, BB_1, CC_1 共点. □

注 10-3: 这个题 是一个中等偏难题 , 首先要注 意到 A_1, B, P, R 共圆.A_1, C, Q, R 共圆. 熟悉 Miquel 点的同学会较快发现, 但利用同一法也不是很容易证明. 接着要证明 A_1 的唯一性, 这一部分主要用到圆内, 圆周, 圆外的性质. 最后一个导比例是常规操作, 总结来说, 要做对本题, 需要熟悉许多性质, 而且又要注 意书写规范, 是一个容易被扣分的题 .

题 10-4. 求证: 任意两条 Nagel 线长度之和大于该三角形的半周长. (三角形顶点与对应边与旁切圆切点连接的线段为 Nagel 线.)

解 10-4:

设 $\triangle ABC$ 的内切圆分别切于 BC, CA, AB 于点 A', B', C', 对应旁切圆与对应边的切点分别为 A'', B'', C''.P 为 C 在 $\angle A$ 平分线上的投影, 所以 P 在线段 $A'C'$ 上. 先证明 $BB'' + CC'' >$ 半周长 p. 由于对称性不妨设 $\angle B \le \angle C$. CH 为

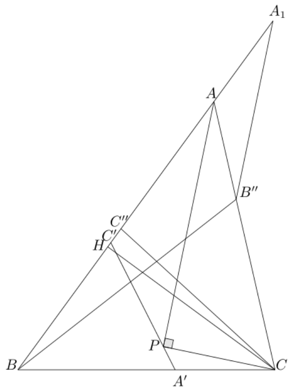

图 10-4

三角形的高. 射线 BA 上有点 A_1, 使得 $BA_1 = p$. 则

$$AB'' = AA_1 = p - c$$

且

$$p < BB'' + B''A_1.$$

可知如果

$$B''A_1 < CH,$$

可得

$$p < BB'' + CH < BB'' + CC''.$$

由于

$$A_1B'' = 2(p-c)\cos\frac{A}{2}, CH = AC\sin A = 2AC\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

则还需证明

$$AC\sin\frac{A}{2} > p - c.$$

由于 $\angle C \geq \angle B$, 又

$$PC = AC\sin\frac{A}{2}, A'C = p - c$$

且

$$\angle PA'C = \frac{\pi + \angle B}{2}.$$

可知 CP 是 $\triangle A'CP$ 的最长边, 命题 得证. $\square$

注 10-4: 这个题 是一个较难的几何 (不等式) 题 . 要能够才想到 $B''A_1 \leq CH$ 是需要比较强的观察力, 之后的 P 在 A_1C_1 上也是需要对内切圆结构有较为透彻的了解 才能够联想到的. 事实上本题也可设 $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$ 而推出

$AA'' \geq BB'' \geq CC''$ 的结论, 如证明

$$\begin{aligned}&\frac{-a^3+2ab^2-2abc+2ac^2+b^3-b^2c-bc^2+c^3}{2a}\\ \leq&\frac{a^3+2a^b-a^2c-2abc-ac^2-b^3+2bc^2+c^3}{2b}\\ \leq&\frac{a^3-a^2b+2a^c-2abc-ab^2+b^3+2b^2c-c^3}{2c}\end{aligned}$$

即可证明该结论. 则本题的证明将简单一些,但这并不太容易. 本题也可以用三角形 ABC 的三边长 a,b,c 计算, 但是计算量十分之大, 并且想要证明这个不等式也基本没有竞赛做法, 在此也不推荐用三边将命题转化为不等式问题的做法.

题 10-5. 设 AA_1,BB_1,CC_1 分别为 $\triangle ABC$ 的三条高.A_0 和 C_0 分别为 $\triangle A_1BC_1$ 外接圆与直线 A_1B_1 和 C_1B_1 的交点. 求证:AA_0 和 CC_0 交于 $\triangle ABC$ 的一条中线上, 或都平行于它.

解 10-5: (甘润知)

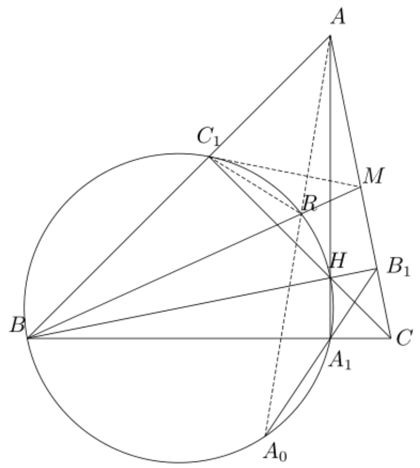

图 10-5

我们证明:AA_0 交 CC_0 于 BM 上,M 是边 AC 的中点.

事实上只需要证明: 若 BM 交 $\triangle A_1BC_1$ 的外接圆 (记为ω) 于 R, 则 A,R,A_0 三点共线. 事实上, 由 B,R,A_0,A_1 四点共圆知

$$\angle A_0RB=\angle A_0A_1B=\angle B_1A_1C=\angle BAC$$

则只需要证明

$$\angle ARM=\angle BAC.$$

注 意到

$$\angle BRC_1=\angle BA_1C_1=\angle BAC=\angle AC_1M,$$

则 MC_1 是 ω 的切线, 由 M 是直角 $\triangle AC_1C$ 斜边上的中点和圆幂定理知

$$MA^2 = MC_1^2 = MR \cdot MB.$$

故

$$\triangle MAR \sim \triangle MBA,$$

故

$$\angle ARM = \angle BAC,$$

知 A, R, A_0 三点共线. 类似地, C, R, C_0 三点共线, 故 AA_0 交 CC_0 于 BM 上. □

注 10-5: 由对称性可以猜到 AA_0 交 CC_0 于 AC 边的中线, 如果准确绘图, 可以知道这个点还在 ω 上, 之后只要证一半, 但通过导角便可轻松得到结论. 本题是一个简单题 .

题 10-6. 锐角 $\triangle ABC$ 中,$AC > AB$, 且 AK 和 AT 分别为它的角平分线和中线. 直线 AT 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 D. 点 F 是 K 关于 T 的对称点. 已知 $\triangle ABC$ 各内角大小, 求 $\angle FDA$ 的大小.

解 10-6: (甘润知)

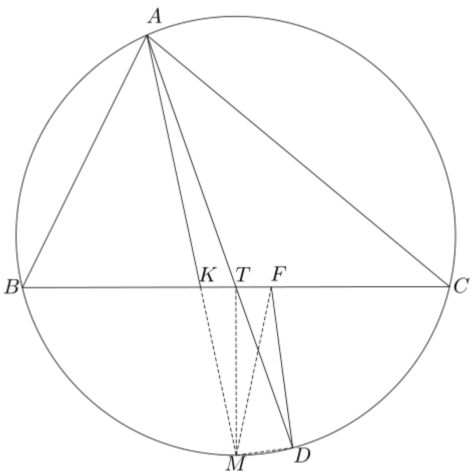

图 10-6

设 AK 交 $\overset{\frown}{BC}$ 于点 M. 注 意到对称性: K, F 关于直线 MT 对称. 则

$$\angle MFT = \angle MKT = \angle AKB = \angle ACM = \angle ADM.$$

于是 T, F, M, D 四点共圆. 故

$$\angle TDF = \angle TMF = \angle AMT = 90^\circ - \angle AKB = 90^\circ - (\frac{\angle A}{2} + \angle C) = \frac{\angle B - \angle C}{2}.$$

□

注 10-6: 这个题目放在 10-6 的位置实在是有点简单, 唯一的要点就是发现一个共圆的条件, 之后便是导角常规操作了.

题 10-7. 设 P 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任意一点.K 为 $\triangle PAB$ 的内心.$\triangle PAC$ 的内切圆切 BC 于 F. 点 G 在 CK上, 且 $FG \parallel PK$. 求 G 的轨迹.

解 10-7: (张冠宇-马飞雁)

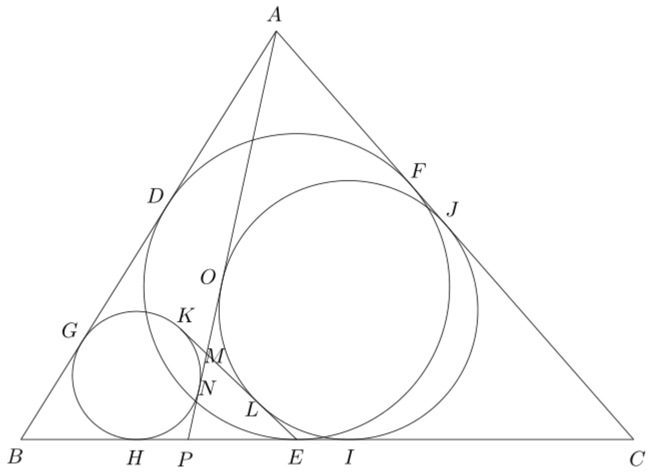

图 10-7.1

引理: 在 $\triangle ABC$ 中,P 为 BC 上任意一点, 作 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ACP$ 内切圆, 则两内切圆的内公切线过 $\triangle ABC$ 内切圆与 BC 的切点 E.

证明: 设 $KM = x, ML = y, CIE = z, PH = w, AG = AN = b, CJ = CI = a, BG = BH = c$. 则 $KE = x+y+z, PE = x+y+z-w, AO = b-x-y = AJ, AC = b-x-y+a, AB = b+c, BC = c+w+(x+y+z-w)+z+a = a+c+x+y+2z$. 由于

$$P_{\triangle ABC} = \frac{2b+2(a+c)+2z}{2} = a+b+c+z.$$

$$\frac{AC+BC-AB}{2} = \frac{a+b+a+c+2z-b-c}{2} = a+z = CE.$$

则 E 为 $\triangle ABC$ 内切圆的切点.

设 $\triangle PAC$ 内切圆为 $\odot J$,B 点对应的旁切圆为 $\odot I_B$,C 点对应的旁切圆为 $\odot I_C$. 直线 BC 切 I_B 于 T. 过 T 作 $l \parallel BI_C$. 过 T 作 $TR \perp l$ 交直线 PI_B 于 R.

当 P 靠近 B 时 G 靠近 N, 当 P 靠近 C 时 G 靠近 X.

$$\frac{TQ}{BI_C} = \frac{TP}{PB} = \frac{TR}{BI_B}$$

由 BI_BI_CC 共圆得

$$\frac{TQ}{TR} = \frac{BI_C}{BI_B} = \frac{TC}{TI_B}$$

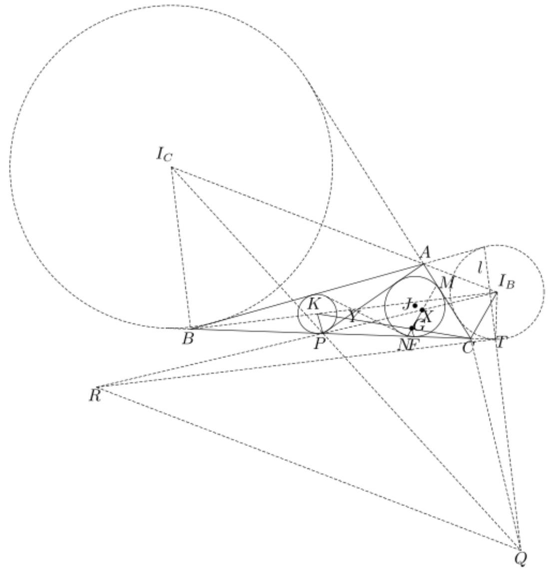

图 10-7.2

则可知

$$\triangle CTI_B \sim \triangle QTR,$$

因此

$$\triangle CTQ \sim \triangle I_BTR.$$

又由于

$$CT \perp I_BT,$$

则

$$CQ \perp PI_B.$$

下证明: 作点 C 关于 $\triangle ABC$ 内切圆的极线 MN. 取 MN 中点 X,NX 即为所求轨迹. 作 $\odot K$ 与 $\odot J$ 内公切线交 AP 于 Y. 由引理可知 $\odot K$ 与 $\odot J$ 的内公切线过 N. 对 $\triangle PNY$ 与其旁切圆 $\odot K$ 与 $\odot J$ 使用同上思路, 不难证明 $CJ \perp NG$, 则 G 在 NX 上. □

注 10-7: 这是一道有难度的题 , 证明过程的前后两部分内容是大体相似的, 究其原因, 就在于同一个圆的两重身份, 既是大三角形的内切圆, 又是小三角形的旁切圆, 内切圆和旁切圆同时出现时, 就可能会出现相似甚至位似, 这便是本题的精髓所在.

题 10-8. 在空间中给定几个点和平面. 已知对于任意两个点, 都恰好有两个平面包含着它们, 并且每个平面包含着至少四个给定的点. 则是否所有给定

的点都共线?

解 10-8:

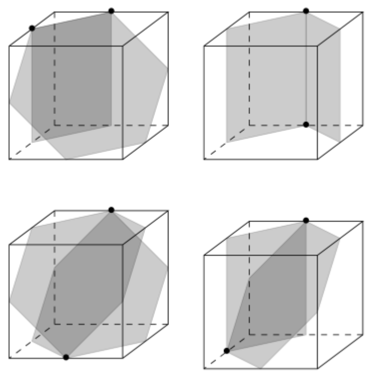

图 10-8

并不一定. 我们构造给出一个反例的构造:

对正方体 $ABCDA'B'C'D'$, 我们取其 12 条棱的中点. 每一条棱都与另外四条棱相连, 我们取这四条棱的中点所决定的平面 (比如, 与 BB' 相连的 $AB, BC, A'B', B'C'$ 这四条棱的中点就可以决定这样一个平面), 这一类平面称为 A 类面.

另外再取过正方体中心, 并垂直于对角线的一共四个平面, 这一类平面称为 B 类面. A 类面和 B 类面总计 16 个平面. 接下来我们证明这 12 个点和 16 个平面满足题 设要求, 这 12 个点显然不共线, 则证明这是一个反例. 很明显每一个 B 类面会与不与对角线端点相连的六条棱交在中点上, 即这四个 B 类面每个上面都有六个点, 所以每个平面上至少有四个点.

另外, 这十二个点的位置关系可以被分为如下四种, 每一种位置关系的两个点都恰好属于两个平面. 所以这12个点和16个面满足题 设. □

注 10-8: 很难的一个立体几何题 , 首先能够想到答案是否定的, 问题 就变成一个构造题 , 其难点主要是想到要构造一个正方体以及棱的中点. 之后在论述与证明方面, 还有不少的细节需要注 意. 本题是一个很难得分的难题 .

3.2 通讯赛

题 11-1. 单位圆 $\odot O$ 中内接了一锐角 $\triangle A_1A_2A_3$. 三条线段 A_iO 交对边于 $B_i(i=1,2,3)$.

(a) 求 B_iO 中最长线段长度的最小值.

(b) 求 B_iO 中最短线段长度的最大值.

解 11-1: (甘润知)

设 $B_iO = x_i, i = 1, 2, 3$. 由面积法，我们容易得到

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{x_i}{x_i+1} = 1$$

(由于 $\dfrac{x_i}{x_i+1} = \dfrac{x_i}{x_i+OA_i} = \dfrac{S_{\triangle OA_{i+1}A_{i+2}}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}}$, 三式相加和为 1). 则

$$\sum_{\text{cyc}} x_1x_2 + 2x_1x_2x_3 = 1,$$

故

$$1 = \sum_{\text{cyc}} x_1x_2 + 2x_1x_2x_3 \le \frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3} + \frac{2(x_1+x_2+x_3)^3}{27},$$

则

$$x_1 + x_2 + x_3 \ge \frac{3}{2}.$$

故最长的长度

$$l \ge \frac{x_1+x_2+x_3}{3} \ge \frac{1}{2}.$$

当 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形时取到等号. 设最短边为x_1, 则

$$1 = \sum_{\text{cyc}} x_1x_2 + 2x_1x_2x_3 \ge 3x_1^2 + 2x_1^3$$

则

$$x_1 \le \frac{1}{2}.$$

当 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形时取到等号.

综上所述，最长边的最小值是 $\dfrac{1}{2}$, 最短边的最大值是 $\dfrac{1}{2}$, 当 $\triangle A_1A_2A_3$ 为正三角形时取到等号. □

题 11-2. 设 $\triangle ABC$ 的边 AC 分别切其内切圆和对应旁切圆于 K 和 L. 设 P 为 $\triangle ABC$ 内心在 AC 垂直平分线上的投影. 已知 $\triangle BKL$ 外接圆过 K 和 L 的两条切线交点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 求证: 直线 AB 和 BC 都与 $\triangle PKL$ 的外接圆相切.

解 11-2: (陈奕宸)

先证下面引理.

引理: 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 AB 上一点, $MA, M'A$ 为 $\triangle ABC$ 的中线和陪位中线. 若 $DN = NC$, 则 $\triangle ACD \sim \triangle ABC$.

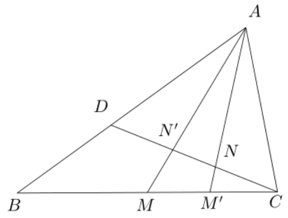

图 11-2.1

证明: 对$\triangle BCD$和截线$M'NA$使用梅涅劳斯定理:

$$\frac{CM'}{M'B}\cdot\frac{BA}{AD}\cdot\frac{DN}{NC}=1$$

可得

$$\frac{CM'}{M'B}=\frac{AD}{AB}.$$

对 $\triangle BCD$ 和截线 $MN'A$ 使用梅涅劳斯定理:

$$\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BA}{AD}\cdot\frac{DN'}{N'C}=1$$

可得

$$\frac{DN'}{N'C}=\frac{AD}{AB}.$$

注 意到陪位中线的性质,

$$\frac{AD}{AB}=\frac{CM'}{M'B}=\frac{AC^2}{AB^2},$$

$$\frac{AD}{AB}=\frac{DN'}{N'C}=\frac{AD^2}{AC^2},$$

则

$$\frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB},$$

又 $\angle A$ 为公共角, 故

$$\triangle DAC\sim\triangle CAB$$

设 N 为 $\triangle ABC$ 外切圆中 $\widehat{B}AC$ 的中点. 因为 K 为内切圆切点, L 为旁切圆切点, K 与 L 关于 AC 中点 M 对称. 设 LW,KW 为 $\triangle BKL$ 外接圆的两条切线, 则 $LW=KW$, W 在直线 MN上. 又 W 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上, 则 W 为 MN 与 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点. 作 K 的对径点 D, 有 B,D,L 共线.

由于 $MN\parallel DK, IP\perp MN$, 则 $IP\perp DK$. 又 $LK\perp DK$, 则 $IP\parallel KL$. 又四边形 $IPMK$ 为矩形, 则

$$IP\parallel MK,\ \ IP=MK=\frac{KL}{2}.$$

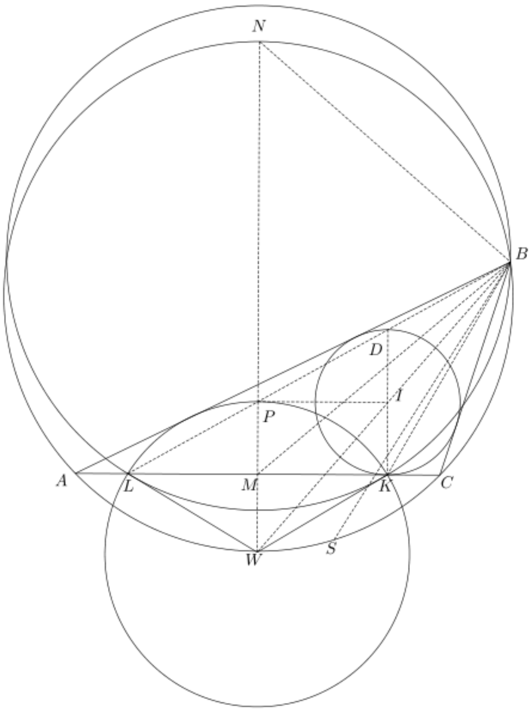

图 11-2.2

又由于 $IP \parallel KL$, 于是 P 落在直线 BDL 上. 因 WL, WK 为 $\triangle BLK$ 的外接圆切线, 则 BW 为 $\triangle BLK$ 的陪位中线. 又由于 $LM = MK, DI = IK$, 由引理, 有 $\triangle BDK \sim \triangle BKL$. 又因为在 $\triangle BDK, \triangle BKL$ 中, I, M为对应点, 故

$$\triangle BDI \sim \triangle BKM,$$

则

$$\angle BID = \angle BMK.$$

又因为 $\angle BID = \angle KIW = \angle BWM$, 故 $\angle BMK = \angle BWM$, 故

$$90^\circ - \angle BMK = 90^\circ - \angle BWM,$$

即

$$\angle BMN = \angle BNM.$$

所以 $BM = BN$.

在 $\widehat{WC}$ 上取一点 S, 使得 $BS = BN = BM$. 因 $\angle BCS = \widehat{BAS}$ 所对圆周角,

$$\angle BMA = \angle BMN + 90^\circ = \angle BNM + 90^\circ = \widehat{BW}$$

所对圆周角 $+\widehat{WAN}$ 所对圆周角 $= \widehat{BAN}$ 所对圆周角.

由于 $BN=BS$, 则

$$\widehat{BAS}=\widehat{BAN}$$

,

$$\angle BCS=\angle BMA.$$

又 $\angle BSC=\angle BAC$, 则 $\triangle BSC\sim\triangle BAM$. 由中线长公式可得

$$AB\cdot BC=BM\cdot BS=BM^2=\frac{AB^2}{2}+\frac{BC^2}{2}-\frac{AC^2}{4},$$

则

$$AC^2=2AB^2+2BC^2-4AB\cdot BC=2(AB-BC)^2,$$

则

$$AC=\sqrt{2}|AB-BC|,$$

即$AC=\sqrt{2}KL$. 由于 $WK^2-MK^2=WM^2=WC^2-CM^2$ (勾股定理), 则由鸡爪定理得

$$\begin{aligned}&WK^2=WC^2-CM^2+MK^2=WI^2-(AM^2-MK^2)\\&=WI^2-[(\sqrt{2}MK)^2-MK^2]=WI^2-MK^2=WI^2-PI^2=WP^2\end{aligned}$$

则 $WK=WP$, 即 $\triangle LPK$ 的外心为点 W. 我们设 W 到直线 AB 的距离为

$$BW\sin\angle ABW=BW\sin\frac{B}{2}=2R\cos\frac{C-A}{2}\sin\frac{B}{2}=R(\cos A+\cos C)$$

由 Carnot 定理得 $R+r=R(\cos A+\cos B+\cos C)$.

所以 W 到直线 AB 的距离为 $R(1-\cos B)+r=WM+MP=WP=$ $\triangle PKL$ 的外接圆半径. 故 AB 与 $\triangle PKL$ 外接圆相切, 同理 BC 也与 $\triangle PKL$ 外接圆相切. □

注 11-2: 这是一道难度较高的几何题 前半部分以角的计算为主, 后半部分以边的计算为主, 考查平面几何的综合能力. 在做出一个准确的图后不难发现许多易证得的性质, 比如W落在MN上,B,D,P,L共线等. 此题 的第一个难点是观察并证明出$\triangle BDK\sim\triangle BKL$, 这要求对陪位中线的性质掌握, 而第二个难点便在于点S的构造, 在构造出点S后, 便是一些常规的计算, 证明点到直线的距离等于圆的半径, 问题 便迎刃而解 了.

Carnot定理的证明:

$$2S_{\triangle ABC}=(a+b+c)r=a\cdot OD+b\cdot OE+C\cdot OF,$$

其中 D,E,F 分别是 O 在 BC,CA,AB 上的投影. 因为 A,E,O,F 四点共圆, 则由 Ptolemy 定理, 有 $AO\cdot EF=AE\cdot OF+AF\cdot OE$, 即 $\dfrac{a\cdot R}{2}=\dfrac{b\cdot OF}{2}+\dfrac{C\cdot OE}{2}$.

$$2S_{\triangle ABC}=(a+b+c)r=a\cdot OD+b\cdot OE+C\cdot OF,$$

$$a\cdot R=b\cdot OF+c\cdot OE$$

$$b\cdot R=a\cdot OF+c\cdot OD,$$

$$c\cdot R=b\cdot OD+a\cdot OE.$$

上面四式相加得

$$(a+b+c)(R+r)=(a+b+c)(OD+OE+OF)$$

则 $R+r=OD+OE+OF$. 即

$$R+r=R(\cos A+\cos B+\cos C).$$

题 11-3. 设 $\triangle ABC$ 的内切圆 ω 分别切边 BC,CA,AB 于点 D,F,E. 过 E 的 DF 垂线交 BC 于点 X, 过 F 的 DE 垂线交 BC 于点 Y. 线段 AD 与 ω 的另一交点为点 Z. 求证 $\triangle XYZ$ 的外接圆与 ω 相切.

解 11-3: (陈昱达)

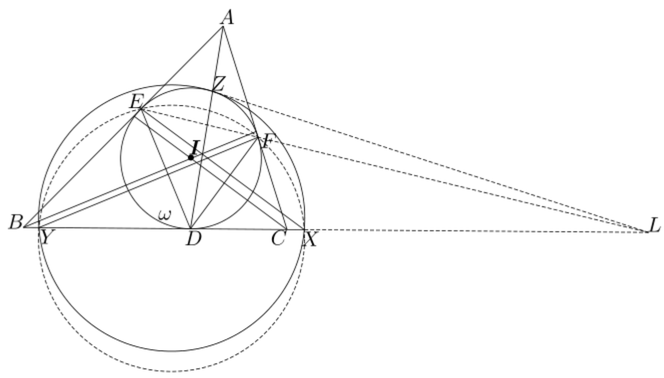

图 11-3

由于 FY 与 $\angle B$ 的角平分线平行, EX 与 $\angle C$ 的角平分线平行, 则

$$\angle FEX=\angle AFE-\angle ACI=90^\circ-\frac{\angle A}{2}-\frac{\angle C}{2}=\frac{\angle B}{2}=\angle FYC$$

那么 E,F,X,Y 共圆. YX 与 EF 交于点 L, 再过 L 作 ω 的切线, 设与 ω 交点是 R. 则由 $LR^2=LE\cdot LF, LE\cdot LF=LX\cdot LY$ 可得 $LR^2=LX\cdot LY$. 即得两圆相切. □

注 11-3: 本题不难, 结合圆幂定理进行导角与导边, 便可顺利得出结论.

题 11-4. 设 AH_1 和 BH_2 分别为 $\triangle ABC$ 的高; 且其外接圆过 A 的切线交 BC于 S_1, 过 B 的切线交 AC 于‘S_2; T_1 和 T_2 分别为 AS_1 和 BS_2 的中点. 求证:‘T_1T_2, AB, H_1H_2 共点.

解 11-4: (陈昱达)

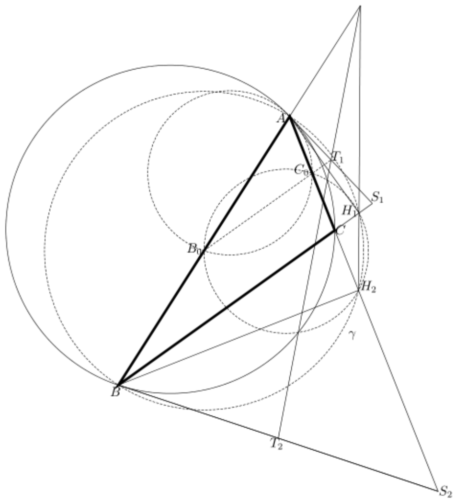

图 11-4

由于 $\angle AH_1B = \angle AH_2B = 90°$, 则 A, B, H_1, H_2 四点共圆, 将该圆称为垂足圆.

AB 在垂足圆与 $\triangle ABC$ 外接圆的根轴上. 由于 S_1 在 BC 上, T_1 是 AS_1 的中点, 所以 T_1 在平行于 BC 的中位线 B_0C_0 上. 又 AT_1 与过 A, B_0, C_0 的圆相切, 则 $T_1A^2 = T_1B_0 \cdot T_1C_0$. 由于 T_1A 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相切, 且 B_0 和 C_0 都在 $\triangle ABC$ 的九点圆上, 又 T_1 到外接圆和九点圆的幂相等, 所以 T_1 在外接圆和九点圆的根轴上. 类似地, T_2 也在此根轴上. 又知 H_1H_2 在九点圆和垂足圆的根轴上, 由根心定理得三条根轴共点, 即 T_1T_2, AB, H_1H_2 共点. □

注 11-4: 本题小有难度, 难点主要在于需考虑到九点圆. 考虑到九点圆后, 结合根心定理便可成功解 出.

题 11-5. 给定三个圆 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. ω_1 和 ω_2 交于 A_0 和 A_1, ω_2 和 ω_3 交于 B_0 和 B_1, ω_3 和 ω_1 交于 C_0 和 C_1. 设 $O_{i,j,k}$ 为 $\triangle A_iB_jC_k$ 的外心. 求证: 有着 $O_{i,j,k}O_{1-j,1-i,1-k}$ 形式的四条线共点或平行.

解 11-5: (马飞雁)

设 ω_1,ω_2,ω_3 的根心为 O, O 到三个圆的圆幂 $A_0O \cdot A_1O = C_0O \cdot C_1O = B_0O \cdot B_1O = R^2$. 假设 O 在 ω_1,ω_2,ω_3 的内部, 以 O 为反演中心, R 作为半

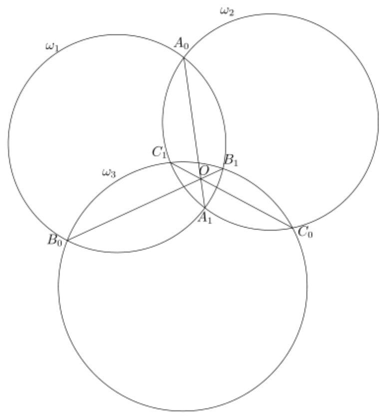

图 11-5

径作三个圆的反演变换 $\rho(O,R)$. 易知 ω_1,ω_2,ω_3 三圆反演不变, 且 $A_0 \overset{\rho(O,R)}{\longleftrightarrow} A_1, B_0 \overset{\rho(O,R)}{\longleftrightarrow} B_1, C_0 \overset{\rho(O,R)}{\longleftrightarrow} C_1$. 则有 $\triangle A_iB_jC_k$ 的外接圆 $\overset{\rho(O,R)}{\longleftrightarrow}$ $\triangle A_{1-i}B_{1-j}C_{1-k}$ 的外接圆. 即对应点 $O_{i,j,k}$ 和 $O_{1-i,1-j,1-k}$ 的连线过反演中心点 O. 同理 O 在 ω_1,ω_2,ω_3 外部时, 四线共点于 O. 当根轴 A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 平行时, O 为无穷远点. 则 $O_{i,j,k}O_{1-j,1-i,1-k}$ 四线共点或平行. □

注 11-5: 本题的难点在于三个没有过多描述的圆和因此而难以刻画的多条线段. 容易注 意到三条根轴交于一点或平行, 若能由圆幂相等联想到反演, 则问题 就能顺利解决了.

题 11-6. 四边形 $ABCD$ 外切于 $\odot I$. 且 $ABCD$ 对边不平行, 各边均不相等. 设 K, L, M, N 分别是 AB, BC, CD, DA 的中点. 已知 $AB \cdot CD = 4IK \cdot IM$. 求证: $BC \cdot AD = 4IL \cdot IN$.

解 11-6: (甘润知)

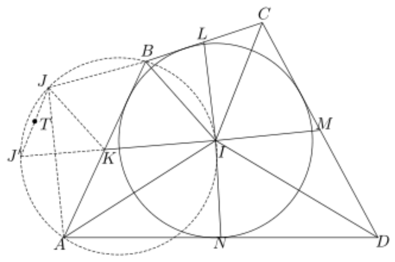

图 11-6

构造点 J, 使 J, I 在 AB 异侧且满足 $\triangle BJA \sim \triangle CID$, 则 K, M 是相似对应点, 则

$$\triangle CMI \sim \triangle BKJ,$$

则
$$\frac{MI}{CD}=\frac{JK}{AB}.$$
又
$$\frac{MI}{CD}\cdot\frac{IK}{AB}=\frac{1}{4},$$
故
$$JK\cdot IK=\frac{AB^2}{4}=KA^2=KB^2.$$
注 意到圆外切四边形的性质, $\angle CID+\angle BIA=180^\circ$, 结合 $\triangle BJA\sim\triangle CID$, 故 B,J,A,I共圆. 延长 IK 交 $\triangle BIA$ 的外接圆于 J'. 注 意到相交弦定理,
$$BK\cdot KA=IK\cdot KJ',$$
则
$$KJ=KJ'.$$

设 $\triangle BIA$ 外心是 O, JJ' 中点是 T, 则
$$KT\perp JJ',OT\perp JJ'.$$
故 O,K,T共线. 由
$$OK\perp AB,OKT\perp JJ'$$
得
$$AB\parallel JJ'.$$
故
$$\angle IKB=\angle J'KA=\angle KJ'J=\angle JKB,$$
又
$$KB^2=JK\cdot IK,$$
知
$$\triangle JKB\sim\triangle BKI,$$
注 意到
$$\triangle BJA\sim\triangle CID,$$
故
$$\angle MCI=\angle KBJ,$$

而 I 为四边形 $ABCD$ 内切圆圆心．则

$$\angle ICM=\angle ICB,\angle IBC=\angle IBA.$$

又

$$\triangle KBI\sim\triangle KJB\sim\triangle MIC,$$

则

$$\triangle KBI\sim\triangle KJB\sim\triangle MIC\sim\triangle IBC.$$

注 意到

$$\angle AID=180^\circ-\angle BIC=180^\circ-\angle BKI=\angle AKI,$$

$$\angle KAI=\angle IAD,$$

则

$$\triangle AKI\sim\triangle AID.$$

故

$$AI^2=AK\cdot AD=AN\cdot AB,$$

则

$$\triangle ANI\sim\triangle AIB,$$

则

$$\angle IND=180^\circ-\angle ANI=180^\circ-\angle AIB=\angle AJB=\angle CID.$$

由 $\angle IDC=\angle IDA$，则

$$\triangle CDI\sim\triangle IDN.$$

类似地 $\triangle CID\sim\triangle CLD$．故

$$\triangle CLI\sim\triangle CID\sim\triangle IND,$$

则

$$\frac{CL}{LI}=\frac{IN}{ND}.$$

故

$$CL\cdot ND=LI\cdot IN.$$

.又 L, N 分别为 BC, AD 的中点, 故

$$BC \cdot AD = 4IC \cdot IN$$

□

题 11-7. 设 AL_a, BL_b, CL_c 为 $\triangle ABC$ 的三条角平分线. 过 B 点和 C 点的 $\triangle ABC$ 外接圆切线交于点 K_a, 类似地定义点 K_b, K_c. 求证: 直线 K_aL_a, K_bL_b, K_cL_c 共点.

解 11-7: (陈昱达)

由于

$$\angle K_aCL_a = \angle K_aBL_a,$$

则

$$\frac{L_aC}{\sin\angle L_aK_aC} = \frac{L_aK_a}{\sin\angle K_aCL_a} = \frac{L_aK_a}{\sin\angle K_aBL_a} = \frac{L_aB}{\sin\angle L_aK_aB}$$

知

$$\frac{L_aC}{L_aB} = \frac{\sin\angle L_aK_aC}{\sin\angle L_aK_aB}.$$

类似地

$$\frac{L_cB}{L_cA} = \frac{\sin\angle L_cK_cB}{\sin\angle L_cK_cA}, \frac{L_bA}{L_bC} = \frac{\sin\angle L_bK_bA}{\sin\angle L_bK_bC}$$

此时

$$\frac{L_aC}{L_aB} \cdot \frac{L_cB}{L_cA} \cdot \frac{L_bA}{L_bC} = 1,$$

由角元Ceva定理的逆定理可知, K_aL_a, K_bL_b, K_cL_c 共点. □

注 11-7: 本题相较于前面几道来说十分简单, 使用正弦定理和Ceva定理便可轻松解 出.

题 11-8. 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, H 为它的垂心, M 为 AB 的中点, 直线 MH 交过 O 的 AB 平行线于 K, 且 K 位于 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 设 P 为 K 在 AC 上的投影. 求证: $PH \parallel BC$.

解 11-8: (张冠宇)

引理: 若 M, N 关于 $\triangle ABC$ 的 Simson 线分别为 XQ, XP, 则

$$\angle PXQ = \frac{\angle MON}{2}.$$

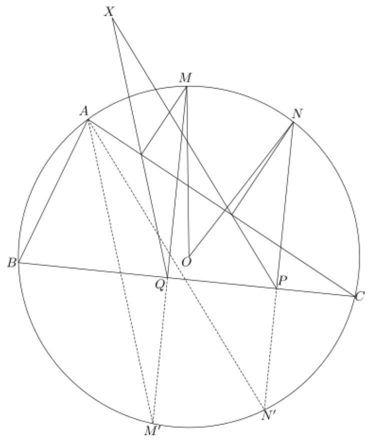

图 11-8.1

证明： 延长 NP 交 $\odot O$ 于 N', 延长 MQ 交 $\odot O$ 于 M'. 易知

$$AN' \parallel XP, AM' \parallel XQ.$$

则

$$\angle PXQ = \angle M'AN'.$$

又由于

$$NN' \parallel MM',$$

则

$$\widehat{MN} = \widehat{M'N'},$$

可得

$$\angle PXQ = \frac{\angle MON}{2}.$$

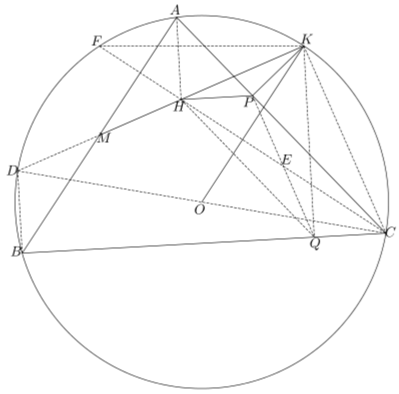

图 11-8.2

延长 HM 至 D 使 $HM = DM$, 则 $AH \parallel BD$ 且 $AH = BD$, C 和 D 为一

组对径点. 连接 CK 可知 $CK \perp DK$. 作 $KQ \perp BC$ 于 Q, 连接 HQ.

由 Steiner 定理可得 PQ 平分 HK. 连 CH 并将其延长, 交圆于 F. 再连接 FK, 可知 OK 垂直平分 CF. 则

$$\angle KFC = \angle KCF = \frac{\angle COK}{2}.$$

设 PQ 与 CH 交于点 E, 由于 CH, PQ 分别为 C, K 关于 $\triangle ABC$ 的 Simson 线, 由引理可知

$$\angle CEQ = \frac{\angle COK}{2} = \angle KCF.$$

又可知 $PQ \parallel KC$, $PQ \perp KH$, 于是 PQ 垂直平分 KH. 又因为 P, Q, C, K 共圆, 且 PQ, KC 为圆内的一组平行弦, 故

$$PK = QC, PC = KQ,$$

则

$$PH = PK = CQ, PC = KQ = HQ.$$

可知四边形 $PHQC$ 为平行四边形, 故 $PH \parallel QC$. □

注 11-8: 本题是一个有些难度的题 , 主要的难点在于题目条件的适当转化, 垂心性质的熟练运用, 以及对于西姆松定理及其相关推论的了解 , 若将这些一一攻克, 便可使此题 化繁为简.

题 11-9. 给定一个椭圆 Γ 及一条给定的弦 AB. 求内接于 Γ 的 $\triangle ABC$ 垂心的轨迹.

解 11-9: (陈奕宸-甘润知)

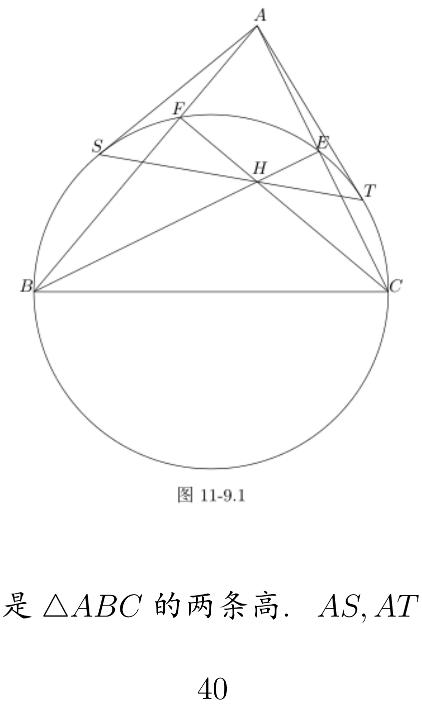

图 11-9.1

引理: 设 BE, CF 是 $\triangle ABC$ 的两条高. AS, AT 为以 BC 为直径的圆的

切线, 则 S, H, T 共线.

证明: 易知 B, C, E, F 共于该圆上. 则 A, H 关于此圆共轭 (Brocard定理). 又 A 关于该圆极线为 ST, 则 S, H, T 共线.

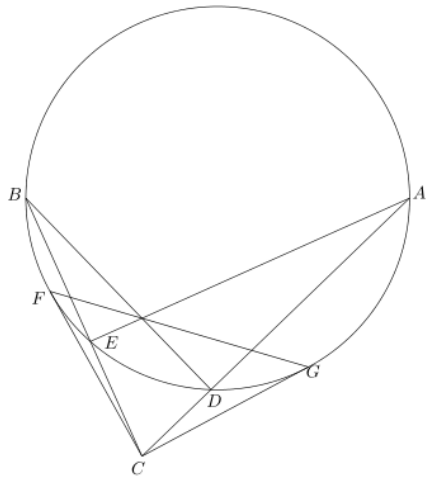

图 11-9.2

我们固定 A, B, 设 $A(1,0), B(-1,0)$, 以 AB 为直径的圆 $\odot O: x^2+y^2=1$, 则过 A, B 的椭圆可表示为 $(x-1)(x+1)+(Bxy+Cy^2+Ey)=0$ (其中 B, C, E 为三个常数.)

因为 $x^2+Bxy+Cy^2+Ey-1=0$ 为椭圆 Γ 的方程, 则

$$\Delta = B^2-4C<0.$$

我们取点 $C(x_0, y_0)$ 为 Γ 上一点. 连 AC 交 $\odot O$ 于 E. 过 C 点引两切线, 切点为 F, G. 我们下面证明 BD, AE, FG 共点, 即

$$\frac{\sin\angle BGF}{\sin\angle FGE}\cdot\frac{\sin\angle GEA}{\sin\angle AEB}\cdot\frac{\sin\angle EBD}{\sin\angle DBG}=1.$$

即

$$\frac{BF}{FE}\cdot\frac{AG}{AB}\cdot\frac{ED}{DG}=1.$$

由三角形的相似, 有

$$\frac{BF}{FE}=\frac{CF}{CE},\frac{AG}{DG}=\frac{CA}{CG},\frac{ED}{AB}=\frac{CE}{CA}.$$

所以

$$\frac{BF}{FE}\cdot\frac{AG}{AB}\cdot\frac{ED}{DG}=\frac{CF}{CE}\cdot\frac{CA}{CG}\cdot\frac{CE}{CA}=1.$$

于是 BD, AE, FG 共点, 设交点为 H. 由于 $BD\perp AC, AE\perp BC$, 故 H 为 $\triangle ABC$ 垂心 (证明共点也可以使用引理). 由 $\odot O: x^2+y^2=1, C(x_0, y_0)$ 得切

点弦 FG 的方程为 $x_0x+y_0y=1$. 又 $CH\perp AB$, 则 $x_H=x_0$.

由于 $CH\perp AB$, 则

$$H(x_0,\frac{1-x_H^2}{y_H}).$$

由

$$x_H=x_0,y_H=\frac{1-x_0^2}{y_0},$$

可知

$$x_0=x_H,y_0=\frac{1-x_H^2}{y_H}.$$

又因为 C 在椭圆上, 故

$$x_0^2+Bx_0y_0+Cy_0^2+Ey_0-1=0,$$

则

$$x_H^2+Bx_H\cdot\frac{1-x_H^2}{y_H}+C\cdot\frac{(1-x_H^2)^2}{y_H^2}+E\cdot\frac{1-x_H^2}{y_H}-1=0$$

约去x_H^2-1, 化简得

$$1-B\cdot\frac{x_H}{y_H}+C\cdot\frac{x_H^2-1}{y_H^2}+\frac{E}{y_H})=0,$$
$$y_H^2-Bx_Hy_H+Cx_H^2-Ey_H-C=0.$$

则H 点的轨迹方程为:

$$Cx^2-Bxy+y^2-Ey-C=0$$

由于 $\Delta=(-B)^2-4C=B^2-4C<0$. 则 H 点的轨迹为椭圆. 又因为 C 与 A,B 不能重合, 故 H 点的轨迹方程为:

$$Cx^2-Bxy+y^2-Ey-C=0(y\neq 0)$$

即除去A,B两点的一个椭圆. □

注 11-9: 这是一道不算很常规的解 析几何题 , 考察了发散思维能力, 若以椭圆的标准方程建立坐标系, 则计算量异常繁琐, 但如果跳出这个思路, 思考到垂心会带来四点共圆, 将视角转变为固定 AB, 而让椭圆动起来, 这样便可利用平面几何知识, 计算出点 A 坐标, 后面便是常规的使用相关点法求轨迹方程了. 而且, 此题 还可以衍生出一些美妙的性质, 例如参数 $C=1$ 时, H 点的轨迹与椭圆 Γ 关于 x 轴对称. 本题最后说明两个椭圆相似(离心率相等)的命题 可用高等知识更为快捷地证明.

题 11-10. 等腰 $\triangle ABC(AB=AC)$ 的高是 AA_0, 以 AA_0 的中点为圆心的

圆 γ 与 AB 和 AC 相切. X 为直线 BC 上任意一点. 求证: 过点 X 向 γ 作的两条切线在直线 AB 和 AC 上所截的线段相等.

解 11-10: (甘润知)

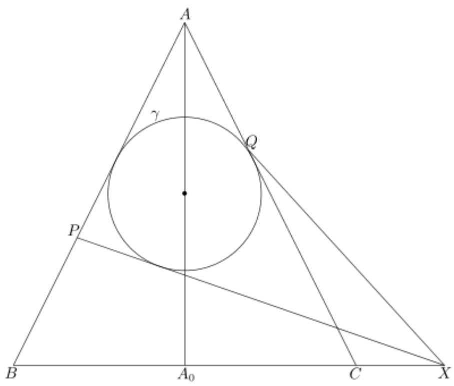

图 11-10

设两条切线分别交 AB, AC 于 P, Q, 如图所示. 以 A_0 为坐标原点, A_0C 为 x 轴正方向, A_0A 为 y 轴正方向建立平面直角坐标系.

设 $B(-1,0), C(1,0), A(0,2a)$. 则圆 γ 的方程为

$$x^2+(y-a)^2=\frac{a^2}{4a^2+1}.$$

设 $X(d,0), XP: x_1=d+k_1y, XQ: x_2=d+k_2y$ (k_1, k_2 存在). 则代入 $x=d+ky$ 于圆方程中知 $\Delta=0$, 即

$$4a^4k^2+2ad(1+4a^2)k+d^2(1+4a^2)-a^2=0$$

该式的两个根分别为 k_1 和 k_2.

由对称性, 只要证明 $BP=AQ$ 即可. 易知 $AB: y_1=2a+2ax$, $AC: y_2=2a-2ax$. 先算 P,$x=d+k_1y=d+k_1(2a+2ax)$, 则

$$x_P=\frac{2ak_1+d}{1-2ak_1}.$$

类似地算 $Q: x=d+k_2y=d+k_2(2a-2ax)$, 则

$$x_Q=\frac{2ak_2+d}{1+2ak_2}.$$

又需证 $AQ=BP$, 即 $1+x_P=x_Q$, 即

$$\frac{d+1}{1-2ak_1}=\frac{d+2ak_2}{1+2ak_2}$$

即

$$2ad(k_1+k_2)+1=-4a^2k_1k_2$$

即

$$-\frac{a^2d^2(1+4a^2)}{a^4}+1=-\frac{a^2d^2(1+4a^2)-a^4}{a^4}$$

这是显然的, 故 $AQ=BP$. 进而得结论成立. □

注 11-10: 本题可以用调和或者导比例的方法证明, 是一个中等难度题 , 笔者给的证法是一个大家可能第一眼想到的做法: 解 析几何, 本题因直角, 切线, 等腰三角形等因素, 很容易想到解 析, 但在做高中数学联赛中的平面几何题 , 尽量不要用解 析几何的方法, 因为可能会导致不必要的扣分.

题 11-11. 在一平面内, 有 a,b 为两条封闭折线 (可能自交) 与 K,L,M,N 四个点. a,b 的顶点与点 K,L,M,N 的位置关系是平凡的 (即这些点既没有三点共线, 也没有以它们为端点的直线在内部共点). KL 和 MN 与 a 均有偶数个交点, LM 和 NK 与 a 均有奇数个交点. 相反, KL 和 MN 与 b 均有奇数个交点, LM 和 NK 与 b 均有偶数个交点. 求证: a 和 b 相交.

解 11-11: 设折线 a 的顶点在平面内任意位置, 图中折线将平面分为多个部分, 将这些部分用黑色或白色表示, (即相邻部分的颜色不同). 平面靠外的部分均为白色. 对与 a 自相交的任意点O, 截取线段 $OA=OB=OC=OD=\epsilon$, 则 $ABCD$ 为矩形. 如果 ϵ 足够小, 那么 a 与 b 的公共点与线段 KL,LM,MN,NK 都位于矩形 $ABCD$ 的外部. 如果将所有自交点构造成这样的矩形并将其以白色表示, 那么平面的黑色部分将是若干不相交的多边形的并集. 接下来, 将部分矩形重新着色, 可以得到一个黑色多边形, 受非自相交折线 a' 的约束 (可以得到一个被非自相交折线 a' 约束的黑色多边形). 以同样的方式构造非自相交折线 b'. 通过这种构造, 折线 a',b' 彼此相交并且与线段 KL,LM,MN,NK 的交点与折线 a,b 的交点相同. 假设 a' 和 b' 不相交. 则他们将平面分为三个部分, 因此点 K,L,M,N 中的两点位于同一部分中. 但这是不可能的, 因为 a' 将 K 和 L 与 M 和 N 分开, 而 b' 将 K 和 N 与 M 和 L 分开. 则 a' 和 b' 相交, 因此给定的折线也相交. □

注 11-11: 这个组合几何题 是一个中等难度题 , 这里面的构造与染色的思路还是比较自然的, 是一个比较不错的联赛训练题 .

题 11-12. 两个单位正方体的中心相同. 是否总能将每个正方体的顶点从 1 到 8 编号, 使得每一对编号相同的顶点间距离不超过 $\frac{4}{5}$? 能否不超过 $\frac{13}{16}$ 呢?

解 11-12: 令 $\kappa=A_1A_2...A_8$ 是其中一个正方体 ($A_1A_2A_3A_4$ 是单位正方形,

并且对于所有 i,A_i 都与 A_i+4 相邻), d_1,d_2,d_3,d_4 是 κ 的空间对角线, 令 λ 是另一个正方体, e_1,e_2,e_3,e_4 是 λ 的空间对角线. 令 O 为两个正方体的共同中心, s 为它们的共同外接球, μ 为不超过 s 直径的正实数, α 为长度为 μ 的弦的中心角.

令 e_j 的集合为 S_i, 其中 e_j 满足与 d_i 的夹角不超过 α. 假设对于所有 $1\le k\le 4$, 集合 S_i 中任意 k 个子集的并集都至少包含 k 个元素. 则根据 Hall 定理, 我们可以从每个 S_i 中选择一个代表 e_i', 使其与所有其他四个代表各不相同, 并用这种方式将每个 d_i 的端点与其对应的 e_i' 的端点配对, 使得每对端点中两个顶点之间的距离最大为 μ.

下面我们观察一下 k 的可能取值以及 μ 的范围. $k=4$: 由平面 $A_1A_2A_3A_4$ 截取外接球 s 的球冠, 令 P 为球冠的中心 (也就是说, P 是 s 上的点, $PA_1=PA_2=PA_3=PA_4$, 并且 $A_1A_2A_3A_4$ 将点 O 与点 P 分离). 我们要实现以 A_i 为中心, 以 a 为半径的八个球冠的并集包含 λ 的所有顶点, 即覆盖 s. 当 $\mu\ge PA_1$ 时, 即成立; μ_4 表示 PA_1 的长度.

$k=3$: 令 Q 为球 s 上的劣弧 $\widehat{A_1A_3}$ 上的一个点, 使得 $A_2Q=A_4Q=\mu$ 且 $A_1Q\le QA_3$. 以此方式在劣弧 $\widehat{A_1A_6}$ 和 $\widehat{A_1A_8}$ 上选择 R 和 S.

不失一般性, 我们需要确保以 A_2,A_4,A_5,A_3,A_6 和 A_8 为中心, 以 α 为半径的六个球冠的并集至少包含正方体 λ 的六个顶点. 等价地, 我们需要确保该并集对 s 的补集最多包含 λ 的两个顶点. 其中补集由两个连接的部分组成, 它们相对于点 O 是对称的. 因此, 有必要确保每个部分最多包含 λ 的一个顶点. 由于每个部分都包含在等边球形三角形 QRS 中, 但又包含任意接近 Q,R,S 的点, 因此必须保证 $QR\le 1$ 或 $\mu\ge\mu_3$ 是充分必要的, 其中 μ_3 是使等式成立的 μ 的值. 显然 $\mu_3>\mu_4$.

对于 $k=2$ 和 $k=1$, 令 d_j 的集合为 T_i, 其中 d_j 满足与 e_i 之间的夹角不超过 α.

$k=2$: 不失一般性, 假设 $S_1\cup S_2$ 不包含 e_1,e_2,e_3. 那么 $T_1\cup T_2\cup T_3$ 不包含 d_1 和 d_2. 从 $k=3$ 的情况我们知道, 只要 $\mu\ge\mu_3$, 就可以避免这种情况.

$k=1$: 假设不失一般性, S_1 不包含任何 e_i. 那么所有 T_i 的并集不包含 d_1. 从 $k=4$ 的情况我们知道, 只要 $\mu\ge\mu_4$, 就可以避免这种情况.

因此 $\mu\ge\mu_3$ 始终成立. 为了使 $\mu<\mu_3$ 不成立, 让 λ 为中心为 O 且棱为 QR 的正方体, 如在 $k=3$ 的情况下. λ 的顶点 Q 和 R 中至多有一个与 A_1 配对; 无论我们将 κ 的哪个顶点与另一个顶点配对, 它们之间的距离都小于等于 μ_3. 因

此, 满足问题 条件的最短距离 μ 为 $\mu_3=\sqrt{\frac{9-2\sqrt{2}-\sqrt{5}}{6}}$. 由于 $\frac{4}{5}<\mu<\frac{13}{16}$, 因此问题 第一部分的答案为否定, 问题 的第二部分的答案为肯定. □

注 11-12: 这个立体几何、组合几何结合图论的题 相对来说难度上升了不少, 能够比较容易地猜到答案, 但是论证与构造方面需要比较多的灵感与知识背景. 本题用到了 Hall 定理.

Hall定理: 二部图 G 中的两部分顶点组成的集合分别为 X, Y, $X=X_1,X_2,...,X_m$, $Y=Y_1,Y_2,...,Y_n$, G 中有一组无公共点的边, 一端恰好为组成 X 的点的充分必要条件是:

X 中的任意 k 个点至少与 Y 中的 k 个点相邻. $(1\le k\le m)$