2019 年北大夏令营试题简析

孙孟越[1] 唐龙天[2] 刘明扬[3] 甘润之[4]

(1. 清华大学, 100084; 2. 成都七中嘉祥外国语学校, 610023;

3. 华南师范大学附属中学, 510630; 4. 华东师范大学第二附属中学, 201203)

炎热的八月, 北京大学举办了他的夏令营. 这里我们给出题目的解答以及一些简评.

北大的考试时间为 2019 年 8 月 5 日 8 : 00−12 : 00 和 8 月 6 日 8 : 00−12 : 00. 每天 4 个题. 解答人的姓名随解答给出.

I. 试 题

1. 给定 $\triangle AEF$, 点 B, D 分别在 AE, AF 上. BF, DE 交于点 C, AC 与 EF 不垂直. AC, EF 交于点 G. $\triangle AEF$ 的内切圆 $\odot I$ 与边 AE 切于点 M, 与边 AF 切于点 N. $\triangle CEF$ 的内切圆 $\odot J$ 与边 CE 切于点 P, 与边 CF 切于点 Q. 取 IJ 中点 S. 设 S 在 AC 上投影为 K. 若 M, N, P, Q 四点共圆, 求证: I, K, J, G 四点共圆.

2. 给定奇素数 p. 定义 $f_i(n)$ 是满足 $a \equiv ib \pmod p, 1 \le a < b \le n$ 的正整数对 (a, b) 的对数. 对正整数 k, 求 $\max\limits_{0\le i\le p-1} f_i(kp) - \min\limits_{0\le i\le p-1} f_i(kp)$ 的值.

3. 对一条直线 l, 若其经过无穷个整点, 则称之为好直线. 对平面上所有整点染色, 满足对任意平行于坐标轴的好直线 l, l 上整点具有无穷多种颜色. 问: 是否对任意这样的染色方式, 一定存在一条不平行于坐标轴的好直线, 其上整点具有无穷多种颜色?

4. 求证: 对任意 n 次实系数多项式 $f(x)$, 总存在 n 次实系数多项式 $g(x)$ 满足 $|g(z)|^2 = |f(z)|^2 + 1$ 对所有单位圆上的复数 z 成立.

5. 给定四边形 $ABCD$, AD 延长线和 BC 延长线交于点 E, BA 延长线和 CD 延长线交于点 F. 平面上的点 P 满足 $PA \cdot PC = PB \cdot PD = PE \cdot PF$. 问:

修订日期: 2019-08-14.

这样的点 P 是否一定存在? 若存在这样的 P, 是否唯一? 证明你的结论.

6. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$, 定义

$$\sigma(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \min\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} e_k a_k\right| :\ e_k = 1 \text{ 或 } -1\right\}.$$

求最小的正实数 λ, 使得

$$\sigma(a_1, a_2, \cdots, a_n)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \le \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

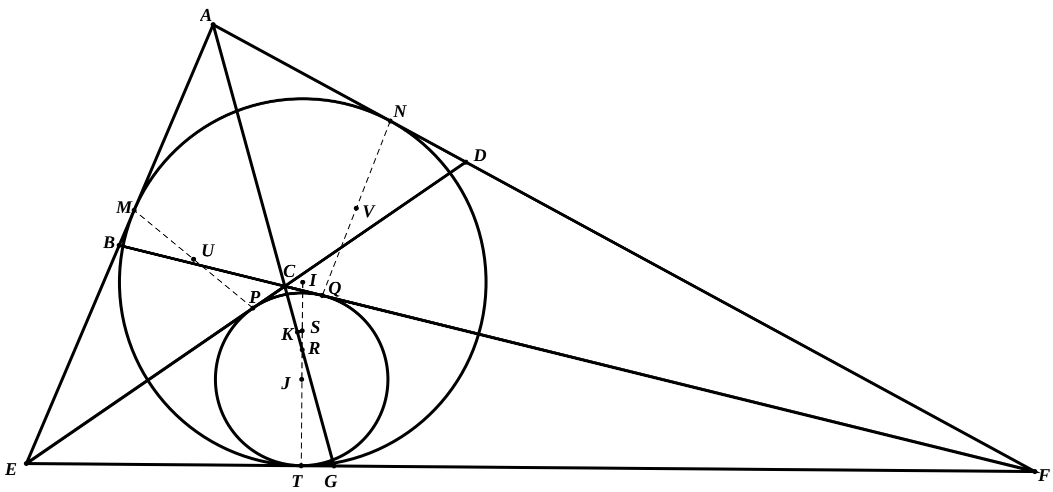
对所有正数 $a_1, a_2, ..., a_n$ 成立.

7. 给定正整数 $a \equiv b \equiv 1 \pmod 3$. 求证: 存在无穷多个最终周期的素数列 $\{p_n\}$, 满足 $p_{n+1} \mid p_n^2 + ap_n + b$ 对所有正整数 n 成立.

8. 给定正整数 n, k, $n \ge 2$. 给定一个标号为 $1, 2, ..., n$ 的树 T. 我们对正整数序列 $(a_1, a_2, ..., a_k)$ 进行操作, 这里的 $1 \le a_i \le n$. 选定一个 $1 \le i \le k-1$, 若 a_i 和 a_{i+1} 在树中有边相连, 则可以交换 a_i, a_{i+1} 的位置. 若一个序列可以通过有限次交换变成另一个, 则称这两个序列等价. 记 $f(T)$ 是序列的等价类的个数, 求 $f(T)$ 的所有可能值.

II. 解答与评注

1. 给定 $\triangle AEF$, 点 B, D 分别在 AE, AF 上. BF, DE 交于点 C, AC 与 EF 不垂直. AC, EF 交于点 G. $\triangle AEF$ 的内切圆 $\odot I$ 与边 AE 切于点 M, 与边 AF 切于点 N. $\triangle CEF$ 的内切圆 $\odot J$ 与边 CE 切于点 P, 与边 CF 切于点 Q. 取 IJ 中点 S. 设 S 在 AC 上投影为 K. 若 M, N, P, Q 四点共圆, 求证: I, K, J, G 四点共圆.



证明 (唐龙天) 首先证明一个引理:

引理 给定 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle X_1Y_1Z_1$, 满足 $XY+X_1Y_1=XZ+X_1Z_1$, 设 $\angle YXZ$ 角平分线与 YZ 交于点 W, 类似定义 W_1. 若 $\angle XWZ=\angle X_1W_1Z_1$, 则有 $XY=XZ, X_1Y_1=X_1Z_1$.

证明 注意到

$$\begin{aligned}XY \gtreqless XZ &\Leftrightarrow \angle XZY \gtreqless \angle XYZ\\ &\Leftrightarrow \angle YXW+\angle YWX \gtreqless \angle ZXW+\angle XWZ\\ &\Leftrightarrow \angle YWX \gtreqless \angle XWZ,\end{aligned}$$

这里的 $\gtreqless$ 可以同时取 $>,=,<$ 中的任意一个.

同理, $\angle Y_1W_1X_1 \gtreqless \angle X_1W_1Z_1 \Leftrightarrow X_1Y_1 \gtreqless X_1Z_1$. 由 $XY+X_1Y_1=XZ+X_1Z_1$ 表明 $XY=XZ, X_1Y_1=X_1Z_1$, 引理得证.

回到原题. 由M,N,Q,P 四点共圆

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \angle AMN+\angle EMP=\angle CQP+\angle BQN,\\ &\Rightarrow 90^\circ-\frac{1}{2}\angle MAN+\angle EMP=90^\circ-\frac{1}{2}\angle PCQ+\angle BQN,\\ &\Rightarrow \angle BQN-\angle EMP=\frac{1}{2}(\angle PCQ-\angle MAN)=\frac{1}{2}(\angle MEP+\angle QFN),\\ &\Rightarrow \angle EUP=\angle FVQ,\end{aligned}$$

其中, U 是 $\angle MEP$ 角平分线与 MP 的交点, V 是 $\angle NFQ$ 角平分线和 NQ 的交点.

而 $EP+FQ=EF=EM+FN$, 对 $\triangle EMP, \triangle FNQ$ 用引理知 $EP=EM, FQ=FN$. 故知 $\odot I, \odot J$ 与 EF 切于同一点 T, 则有 $CE+EF-CF=2ET=EA+EF-FA$.

故凹四边形 $AECF$ 对边之和相等, 存在一个内切圆. 而这等价于四边形 $ABCD$ 有内切圆 ω. 由于 AC 与 EF 不垂直, 我们可设 IJ 与 AG 交于一点 R.

对 $\odot I, \odot J$, 圆 ω 用 Monge 定理,知 $\odot I$ 与 $\odot J$ 内位似中心在直线 AC 上. 故 R 为 $\odot I$ 与 $\odot J$ 内位似中心, 而 $\odot I$ 与 $\odot J$ 切与点 T. 则 T 为 $\odot I$ 与 $\odot J$ 外位似中心. 故 I,R,J,T 构成调和点列(位似中心分圆心比都为两圆半径比).

结合 S 为 IJ 中点 $\Rightarrow \overline{RS}\cdot\overline{RT}=\overline{RI}\cdot\overline{RJ}$. 而 $\angle SKR=\angle GTR=90^\circ$, 故 S,K,T,G 四点共圆 $\Rightarrow \overline{RS}\cdot\overline{RT}=\overline{RK}\cdot\overline{RG} \Rightarrow \overline{RK}\cdot\overline{RG}=\overline{RI}\cdot\overline{RJ} \Rightarrow I,J,K,G$ 四点共圆. □

评注 本题难度较大, 题目涉及两个重要的几何构型: 前半部分主要在证明

A,B,C,D 有内切圆, 而这个几何构型也在 2015 年 CMO 第二题之中出现. 后一半主要用到 Monge 定理与内外位似中心, 而这个几何构型则是在 2008 年 IMO 第 6 题中出现.

这里用到的 Monge 定理: 对三圆 $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3$, 有 Γ_1,Γ_2 的内位似中心, Γ_2,Γ_3 的内位似中心, Γ_1,Γ_3 的外位似中心三点共线. 证明由 Menelaus 定理容易得到.

2. 给定奇素数 p. 定义 $f_i(n)$ 是满足 $a\equiv ib \pmod p, 1\le a<b\le n$ 的正整数对 (a,b) 的对数. 对正整数 k, 求 $\max\limits_{0\le i\le p-1} f_i(kp)-\min\limits_{0\le i\le p-1} f_i(kp)$ 的值.

解 (刘明扬) 对 $\forall n\in\mathbb{N}$, 记 $\overline{n}$ 为 n 模 p 的最小正剩余, 记 n 所在的模 p 剩余类为 A_n.

对 $b\in A_m\ (1\le m\le p)$, 必有 $a\in A_{\overline{im}}$. 设 $a=k_1p+\overline{im}, b=k_2p+m$, 则若 $\overline{im}\ge m$, 则 (k_1,k_2) 满足要求当且仅当 $k_1<k_2$; 若 $\overline{im}<m$, 则 (k_1,k_2) 满足要求当且仅当 $k_1\le k_2$.

而我们有: 满足 $k_1<k_2$ 的 (k_1,k_2) 有 $\binom{k}{2}$ 组, 满足 $k_1\le k_2$ 的 (k_1,k_2) 有 $\binom{k}{2}+k$ 组. 因此

$$f_i(kp)=\left(\binom{k}{2}+k\right)f_i(p)+\binom{k}{2}(p-f_i(p))=kf_i(p)+p\binom{k}{2}.$$

故

$$f_{i_1}(kp)-f_{i_2}(kp)=k(f_{i_1}(p)-f_{i_2}(p)).$$

因此只需考虑 $f_i(p)$ 的最大和最小值.

注意到 $f_1(p)=0$, 故 $f_i(p)$ 最小值为 0.

又 $\overline{ip}=p$, 而对 $1\le x\le p-1$, $\overline{ix}+\overline{i(p-x)}=p$. 故 $\overline{ix}<x$ 和 $\overline{i(p-x)}<p-x$ 至多有一个成立. 这推出 $f_i(p)\le\frac{p-1}{2}$. 由于 p 是奇数, 所以 $f_{p-1}(p)=\frac{p-1}{2}$, 故 $f_i(p)$ 最大值为 $\frac{p-1}{2}$.

当 $k=1$ 时, 所求值为

$$\max_{0\le i\le p-1} f_i(p)-\min_{0\le i\le p-1} f_i(p)=\frac{p-1}{2},$$

故

$$\max_{0\le i\le p-1} f_i(kp)-\min_{0\le i\le p-1} f_i(kp)=\frac{k(p-1)}{2}.$$

□

评注 首先可以把 kp 个连续整数变成 k 段, 每段为 p 个整数. 可以看出要分 a,b 是不是在同一段进行计数. 之后发现, 同一段的时候是要具体处理的. 进

一步, 用配对的方法可以证明 $f_i(p)$ 对 $i \not\equiv 0, 1 \pmod p$ 都有 $f_i(p) = \frac{p-1}{2}$. 整个题思路自然, 属于一个中等偏易的题.

3. 对一条直线 l, 若其经过无穷个整点, 则称之为 好直线. 对平面上所有整点染色, 满足对任意平行于坐标轴的好直线 l, l 上整点具有无穷多种颜色. 问: 是否对任意这样的染色方式, 一定存在一条不平行于坐标轴的好直线, 其上整点具有无穷多种颜色?

解 答案是否定的, 即存在一种染色方式, 对任意不平行于坐标轴的好直线, 其上都只有有限种颜色.

设 $T = \{(x, y) | x, y \in \mathbb{Z}, |y| \geq x^2$ 或 $|x| \geq y^2\}$. 对于 T 中整点, 将其染成两两不同的颜色. 不在 T 中的整点, 染成同一个颜色.

可以发现对任意平行于坐标轴的好直线, 其上只有有限个点不在 T 中, 故其上整点有无穷个颜色. 对任意不平行于坐标轴的直线 l: $y = kx + b$ $(k \neq 0)$, $l \cap T$ 中的点 (x, y) 一定满足

$$kx + b \geq x^2, -(kx + b) \geq x^2, x \geq (kx + b)^2, -x \geq (kx + b)^2$$

这四个不等式之一. 由于 $k \neq 0$, 故这四个关于 x 的不等式, 每一个的解集要么是有限闭区间(左右端点允许重合), 要么是空集. 故存在一个正数 M, 只要 $|x| > M$, 就有 $(x, kx + b) \notin l \cap T$. 由于整数的离散性, 知 $l \cap T$ 交集是有限集. 所以 l 上整点只有有限种颜色. □

评注 这个题也可以把整点改成有理数点或者所有点, 只要把实数平面按照 $(\lfloor x \rfloor, \lfloor y \rfloor)$ 的值分成不同的方格即可.

此外, 这个题本质就是要构造这个 T, 任何平行于坐标轴的好直线和 T 有无穷个交点, 任何不平行于坐标轴的直线和 T 有有限个交点. 这也可以通过归纳构造完成.

有同学指出, 2013 年莫斯科数学奥林匹克中的一个题, 就是要求构造这个 T. 从这个意义上来说, 这个题“撞题”了. 我们这里 T 的构造引自 2013 年题的标准答案.

4. 求证: 对任意 n 次实系数多项式 $f(x)$, 总存在 n 次实系数多项式 $g(x)$ 满足 $|g(z)|^2 = |f(z)|^2 + 1$ 对所有单位圆上的复数 z 成立.

证明 (孙孟越)

我们注意到一个关键的事实: $|z| = 1 \Rightarrow \bar{z} = \frac{|z|^2}{z} = \frac{1}{z}$.

又由于 f 是实系数多项式, 故

$$|f(z)|^2=f(z)\overline{f(z)}=f(z)f(\overline{z})=f(z)f\left(\frac{1}{z}\right).$$

也有

$$|g(z)|^2=g(z)g\left(\frac{1}{z}\right).$$

故只需证明, 存在 n 次实系数多项式 $g(x)$, 满足对任意复数 $x\neq 0$, 有

$$g(x)g\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)+1. \tag{1}$$

我们首先证明 $f(0)\neq 0$ 的情形.

若 f 是常数 a, 则取 $g(x)=\sqrt{a^2+1}\cdot x^n$ 即可使 (1) 成立, 下设 f 不是常数.

我们将 $f(x)f(\frac{1}{x})$ 展开, 设实数 $a_n,a_{n-1},...,a_{-n}$ 满足

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)+1=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0+\cdots+a_{-(n-1)}x^{-(n-1)}+a_{-n}x^{-n}.$$

由于 $f(x)$ 的首项系数和常数项均非零, 可得 $a_n\neq 0$. 由于将 x 换为 $\frac{1}{x}$, 左边不变, 故右边也不变, 故 $a_m=a_{-m},m=1,2,...,n$. 所以可以写为

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)+1=a_n(x^n+x^{-n})+a_{n-1}\left(x^{n-1}+x^{-(n-1)}\right)+\cdots+a_0.$$

不难发现, 对正整数 m, 存在实系数多项式 $p_m(x)$ 满足 $p_m(x+x^{-1})=x^m+x^{-m}$ 对任意复数 x 成立 (归纳法可以证明).

故有 $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)+1$ 可以写为关于 $x+x^{-1}$ 的实系数多项式. 换言之, 存在实数 $b_0,b_1,b_2,...,b_n$ 满足

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)+1=b_n(x+x^{-1})^n+b_{n-1}(x+x^{-1})^{n-1}+\cdots+b_0.$$

比较 x^n 系数得到 $b_n=a_n\neq 0$. 记 $q(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_0$, 则 $q(x)$ 可以写为 $q(x)=b_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$, 这里的 $\alpha_1,...,\alpha_n$ 是 $q(x)=0$ 的全体复数根. 所以

$$f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)+1=b_n(x+x^{-1}-\alpha_1)(x+x^{-1}-\alpha_2)\cdots(x+x^{-1}-\alpha_n). \tag{2}$$

下面我们证明: 对 $k=1,2,...,n$, α_k 满足要么 α_k 不是实数, 要么 α_k 是实数且 $|\alpha_k|>2$.

若不然, 设 $-2\leq\alpha_k\leq 2$, 则存在实数 θ 满足 $\alpha_k=2\cos\theta$. 我们在 (2) 中取 $x=\cos\theta+i\sin\theta$. 这里的 i 是虚数单位. 则有 $x+x^{-1}-\alpha_k=0$, 所以 (2) 右边是 0, 但 (2)左边$=f(\cos\theta+i\sin\theta)f(\cos\theta-i\sin\theta)+1=|f(\cos\theta+i\sin\theta)|^2+1>0$. 此为矛盾.

由于 $q(x)$ 是实系数多项式, 故复数根必然成对出现. 我们设 $q(x)$ 的实根为 $t_1,t_2,...,t_{n-2s}$, 共轭复数根为 $w_1,w_2,...,w_s,\overline{w_1},\overline{w_2},...,\overline{w_s}$.

对 $1 \le k \le n-2s$, 定义 $\beta_k = \frac{t_k+\sqrt{t_k^2-4}}{2} \in \mathbb{R}$. 这里用到了 $|t_k|>2$. 则 $\beta_k+\beta_k^{-1}=t_k$.

对 $k=1,2,...,s$, 定义 $\beta_{n-2s+k} = \frac{w_k+\sqrt{w_k^2-4}}{2} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \beta_{n-s+k}=\overline{\beta_{n-2s+k}}$. 其中, 求平方根可以从两个平方根中任取一个, 则有

$$\beta_{n-2s+k}+\beta_{n-2s+k}^{-1}=w_k,\ \ \beta_{n-s+k}+\beta_{n-s+k}^{-1}=\overline{w_k}.$$

待定实数 C, 我们取 $g(x)=C(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_n)$. 由于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 中共轭复数也是成对出现的, 故 g 是实系数多项式. 而

$$\begin{aligned} g(x)g\left(\frac{1}{x}\right) &= \left(\prod_{k=1}^{n}(-\beta_k)\right)C^2\prod_{k=1}^{n}\left(x+\frac{1}{x}-\beta_k-\beta_k^{-1}\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n}(-\beta_k)\right)C^2\prod_{k=1}^{n}\left(x+\frac{1}{x}-\alpha_k\right) \\ &= \left(\prod_{k=1}^{n}(-\beta_k)\right)\cdot\frac{C^2}{b_n}\cdot\left(f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)+1\right). \end{aligned}$$

我们取 $C^2=\frac{b_n}{\prod\limits_{k=1}^{n}(-\beta_k)}$ 即可, 为此, 只要证明 $\prod\limits_{k=1}^{n}(-\beta_k)$ 的符号与 b_n 符号相同.

事实上, 共轭虚数根的乘积是正实数, 故 $\prod\limits_{k=1}^{n}(-\beta_k)$ 的符号与 $\prod\limits_{k=1}^{n-2s}(-\beta_k)$ 符号相同, $\prod\limits_{k=1}^{n}(-\alpha_k)$ 的符号与 $\prod\limits_{k=1}^{n-2s}(-t_k)$ 符号相同. 再注意 β_k, t_k $(1\le k\le n-2s)$的符号相同. 所以只要证明 $\prod\limits_{k=1}^{n}(-\alpha_k)$ 与 b_n 符号相同即可.

再次回到 (2), 在 (2) 中取 $x=i$, 得到

$$b_n\prod_{k=1}^{n}(-\alpha_k)=f(i)f(-i)+1=|f(i)|^2+1>0.$$

故 $\prod\limits_{k=1}^{n}(-\alpha_k)$ 与 b_n 符号相同, 待定的实数 C 存在, 此时命题成立.

对于 $f(0)=0$ 的 f. 设 $f(x)=x^m\tilde{f}(x)$, $\tilde{f}(0)\ne 0$. 对 $\tilde{f}$ 用上述结论知, 存在 $n-m$ 次实系数多项式 $\tilde{g}(x)$ 使 (1) 成立. 我们取 $g(x)=x^m\cdot\tilde{g}(x)$ 即可使 (1) 成立, 且 g 是 n 次实系数多项式.

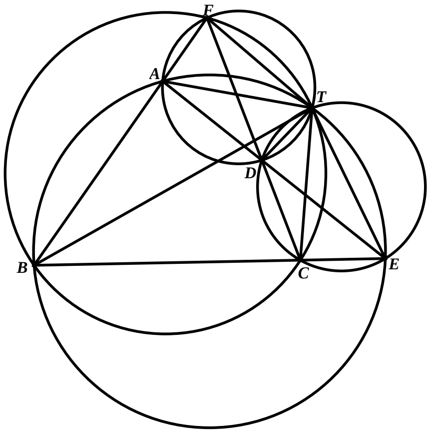
综上, 命题成立. □

评注 第一步将之转化为证明 $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)+1=g(x)g\left(\frac{1}{x}\right)$. 之后, 我们分析左边这个 $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)+1=0$ 的根的位置, 这些根要么要么在实数轴上 t 与 $\frac{1}{t}$ 成对出现, 要么满足 z_0 和 $\frac{1}{z_0},\overline{z_0},\overline{\frac{1}{z_0}}$ 四者同时出现. 这恰恰是 g 存在的条件, 我们就取 g 的根为全体模长 >1 的那些根即可. 然后去证明 $g(x)g\left(\frac{1}{x}\right)=f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)+1$. 主要思路就是要考虑根的分布, 再稍加处理一些细节.

5. 给定四边形 $ABCD$, AD 延长线和 BC 延长线交于点 E, BA 延长线和 CD 延长线交于点 F. 平面上的点 P 满足 $PA\cdot PC=PB\cdot PD=PE\cdot PF$. 问: 这样的点 P 是否一定存在? 若存在这样的 P, 是否唯一? 证明你的结论.

解 存在且唯一.

存在性: 取出完全四边形 $ABECFD$ 的 Miquel 点 T. 则由 Miquel 点的性质知 $\angle TBE=\angle TFD, \angle TEB=\angle TDF \Rightarrow \triangle TEB\sim\triangle TDF \Rightarrow TE\cdot TF=TD\cdot TB$. 并且有 $\angle BTD, \angle FTE$ 的内角平分线重合. 同理有 $TE\cdot TF=TA\cdot TC$, 并且有 $\angle ATC, \angle FTE$ 的内角平分线重合, 故知 T 点满足题目要求.



唯一性: 我们以 T 点为原点建立复平面, 用大写字母对应的小写字母对应该点对应的复数.

由于 $\angle FTE, \angle ATC, \angle BTD$ 的内角平分线重合, 且

$$TA\cdot TC=TB\cdot TD=TE\cdot TF$$

知 $a\cdot c=b\cdot d=e\cdot f$, 我们可不妨设它们均等于 1.

若存在不同于 T 点的点 P 满足要求, 由于 $p\neq 0$, 可以取 $m=\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right)$, M 为复数 m 对应的点, 由条件知

$$|(p-a)(p-c)|=|(p-b)(p-d)|=|(p-e)(p-f)|,$$

则有

$$|(p-a)(p-c)|=|(p-b)(p-d)| \implies |p^2-(a+c)p+1|=|p^2-(b+d)p+1|.$$

这表明

$$\left|m-\frac{a+c}{2}\right|=\left|\frac{p+\frac{1}{p}}{2}-\frac{a+c}{2}\right|=\left|\frac{p+\frac{1}{p}}{2}-\frac{b+d}{2}\right|=\left|m-\frac{b+d}{2}\right|,$$

即 M 点到 AC 中点, BD 中点距离相同.

同理即得 M 点到 AC 中点, EF 中点的距离相同. 设 AC 中点, BD 中点, EF 中点分别为 X, Y, Z. 故 P 在 XY 中垂线上, 又在 XZ 中垂线上.

但由 Newton 线定理知, X, Y, Z 三点共线. 由于 $BEDF$ 不是平行四边形, 所以 Y, Z 不重合. 故 XY 中垂线和 XZ 中垂线没有交点, 这与 P 在这两条直线上相矛盾. 故原题中 P 是存在且唯一的. □

评注 这道题不是一个传统的几何题. 存在性比唯一性简单, 可以猜出 P 同时是 AB 到 DC 的旋转位似中心, 也是 BF 到 DE 的旋转位似中心, 也是 CF 到 AE 的旋转位似中心, 那就猜到了是 Miquel 点. 唯一性的证明过程不容易, 除了思路难以想到, 也有很多细节需要处理. 除了复数的证明, 也有通过三角计算的证明. 这个题难度很大, 因为需要学生对 Miquel 点性质较为熟悉, 并且需要合适地选择唯一性的证法. 这个题唯一性部分目前看来没有纯几何的证明, 线路很窄, 没有看上去那么容易, 考生心态也容易受到影响.

6. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n > 0$, 定义

$$\sigma(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \min\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} e_k a_k\right| : \ e_k = 1 \text{ 或 } -1\right\}.$$

求最小的正实数 λ, 使得

$$\sigma(a_1, a_2, \cdots, a_n)\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \leq \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

对所有正数 $a_1, a_2, ..., a_n$ 成立.

解 (甘润知、孙孟越)

任取正数 $\varepsilon < \frac{1}{n}$. 取 $a_1 = 1, a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \varepsilon$, 则

$$\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1 - (n-1)\varepsilon.$$

故有

$$(1-(n-1)\varepsilon)(1+(n-1)\varepsilon) \leq \lambda(1+(n-1)\varepsilon^2) \iff \lambda \geq 1 - \frac{n(n-1)\varepsilon^2}{1+(n-1)\varepsilon^2}.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 知 $\lambda \geq 1$. 下面证明 λ 最小值是 1.

不妨假设 $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n > 0$. 我们考虑一种选择 e_i 的方法: 取 $e_1 = 1$. 设 $e_1, e_2, \ldots, e_k$ 已经构造好, 来构造 e_{k+1}. 若前 k 项和 $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} e_i a_i \geq 0$, 那么取 $e_{k+1} = -1$. 反之, 若前 k 项和 $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} e_i a_i < 0$, 那么取 $e_{k+1} = 1$. 由 $\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 的定义知, $\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq |S_n|$.

若 $S_n = 0$, 则 $\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, 命题显然成立. 下设 $S_n \neq 0$. 补充定义

$S_0=0$.

由于 $S_0=0$, 故存在一个 $0\le i\le n$ 满足 $S_iS_n\le 0$, 我们取 m 是满足 $S_iS_n\le 0$ 的 i 里最大的那个. 则由 $S_n^2>0$ 知 $0\le m<n$, 我们有

$$|S_{m+1}-S_m|=a_{m+1}, S_mS_{m+1}\le 0\Rightarrow |S_{m+1}|+|S_m|=a_{m+1}.$$

故

$$|S_{m+1}|\le a_{m+1}.$$

并且对于 $m<i<n$, 由 m 的最大性知 $S_iS_n>0, S_{i+1}S_n>0$, 知 $S_iS_{i+1}>0$. 由 e_{i+1} 的选取规则知 $|S_{i+1}|=|S_i|-a_{i+1}$. 故

$$|S_n|=|S_{m+1}|-\sum_{m+1<k\le n}a_k.$$

这里, 若 $m+1\ge n$, 则和式 $\sum\limits_{m+1<k\le n}a_k=0$. 所以

$$\begin{aligned}
&\sigma(a_1,a_2,\ldots,a_n)(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\
\le&|S_n|(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\
=&\left(|S_{m+1}|-\sum_{m+1<k\le n}a_k\right)(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\
\le&\left(a_{m+1}-\sum_{m+1<k\le n}a_k\right)(a_1+a_2+\cdots+a_n)\\
=&\left(a_{m+1}-\sum_{m+1<k\le n}a_k\right)\left(\sum_{1\le k\le m+1}a_k+\sum_{m+1<k\le n}a_k\right)\\
=&a_{m+1}\left(\sum_{1\le k\le m+1}a_k\right)-\left(\sum_{m+1<k\le n}a_k\right)\left(\sum_{1\le k\le m}a_k\right)-\left(\sum_{m+1<k\le n}a_k\right)^2\\
\le&a_{m+1}(a_1+a_2+\cdots+a_{m+1})\\
\le&a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{m+1}^2\\
\le&a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2.
\end{aligned}$$

故 λ 最小值是 1. □

评注 这里我们采用了贪心算法来构造 $\sigma(a_1,a_2,\ldots,a_n)$. 也可以用归纳法来构造: 仍设 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n>0$, 利用归纳假设可以构造出 $e_1,e_2,\ldots,e_{n-1}$, 再选取合适的 e_n 即可. 实质上得到的构造和我们这里用贪心算法相同, 不过论证的部分可以利用归纳假设, 占得了一点便宜.

7. 给定正整数 $a \equiv b \equiv 1 \pmod 3$. 求证: 存在无穷多个最终周期的素数列 $\{p_n\}$, 满足 $p_{n+1} \mid p_n^2 + ap_n + b$ 对所有正整数 n 成立.

证明 (孙孟越) 我们先证明, 任取 p_1 是素数, 存在一个最终周期的素数列满足条件.

我们按照如下的方式构造. 假设 $p_1, p_2, \ldots, p_m$ 已经构造好, 来构造 p_{m+1}.

若 $p_m^2 + ap_m + b$ 是 3 的倍数, 取 $p_{m+1} = 3$.

若 $p_m^2 + ap_m + b$ 不是 3 的倍数, 但有模 3 余 1 的素因子, 我们取 p_{m+1} 是 $p_m^2 + ap_m + b$ 的最小的模 3 余 1 的素因子.

若 $p_m^2 + ap_m + b$ 不是 3 的倍数, 也没有模 3 余 1 的素因子, 我们取 p_{m+1} 是 $p_m^2 + ap_m + b$ 的最小的模 3 余 2 的素因子 (由于 $p_m^2 + ap_m + b$ 是大于 1 的正整数, 必然存在素因子).

下面证明构造出的 $\{p_n\}$ 是最终周期的. 用反证法, 假设 $\{p_n\}$ 不是最终周期的, 我们证明如下关于 $\{p_n\}$ 的性质.

性质 1. 不存在正整数 $i < j$ 满足 $p_i = p_j$.

否则, 注意到 p_{m+1} 可以由 p_m 唯一确定, 归纳法不难证明 $p_{i+k} = p_{j+k}$, $k = 1, 2, \ldots$ 即可. 故 $\{p_n\}$ 自第 i 项起循环, 以 $j - i$ 为一个周期.

此时 $\{p_n\}$ 是最终周期的, 与反证法假设矛盾.

性质 2. 不存在正整数 $i < j$ 满足 p_i, p_j 都是模 3 余 1 的.

由于 $a \equiv b \equiv 1 \pmod 3$, 则有 $p_i^2 + ap_i + b \equiv 0 \pmod 3$, $p_j^2 + ap_j + b \equiv 0 \pmod 3$. 故 $p_{i+1} = p_{j+1} = 3$. 与性质 1 矛盾.

性质 3. 存在一个正整数 T, 满足对 $n \geq T$, $p_{n+1} \leq p_n + a + b$.

由性质 1,2, 知除了至多两个 p_i, 其余 p_i 都模 3 余 2. 故存在正整数 T, 对任意 $n \geq T$, 有 p_n 模 3 余 2.

由我们的取法知, $p_n^2 + ap_n + b$ 有且只有模 3 余 2 的素因子. 但我们有 $p_n \equiv 2 \pmod 3$, 那么就有 $p_n^2 + ap_n + b \equiv 1 \pmod 3$. 故 $p_m^2 + ap_m + b$ 有偶数个模 3 余 2 的素因子, 故至少有两个模 3 余 2 的素因子. 由于 p_{n+1} 为 $p_n^2 + ap_n + b$ 的最小素因子. 故有

$$p_{n+1} \leq \sqrt{p_n^2 + ap_n + b} < p_n + a + b.$$

性质 4. $\{p_n\}$ 有界.

取 $A = \max\{p_1, p_2, \ldots, p_T\} + a + b + 3 > 3$.

当 $N = A!$ 时, $N + 2, N + 3, \ldots, N + a + b + 1$ 是连续 $a + b$ 个合数, 且有

$p_i \le N+1, \forall 1 \le i \le T$.

而对 $n \ge T$, 若 $p_n \le N+1$, 有 $p_{n+1} \le N+a+b+1$. 但 p_{n+1} 是素数, 所以 p_{n+1} 不能为 $N+2, N+3, \ldots, N+a+b+1$ 中任意一个. 故有 $p_{n+1} \le N+1$.

由归纳法可得 $p_n \le N+1$ 对所有 n 成立.

由性质 4, p_n 只有有限多个取值, 这与性质 1 相矛盾. 故 $\{p_n\}$ 是最终周期的. 由于素数有无穷多个, p_1 的值可以取到无穷多个, 故存在无穷多个这样的数列. □

评注 这个模 3 余 1 的条件非常奇怪, 给了我们很大的提示, 主要是要想清楚最终的周期怎么生成. 为此, 可以去分析: 当 p_n 模 3 余 0,1,2 时, p_{n+1} 的取值情况. 最后发现, 实际上只需要处理 p_n 从某项起全为模 3 余 2 的项的情况. 而这将导出我们的性质 3. 由于存在任意长的连续合数, 合在一起导出性质 4, 也可以得到最终周期.

8. 给定正整数 n, k, $n \ge 2$. 给定一个标号为 $1, 2, ..., n$ 的树 T. 我们对正整数序列 $(a_1, a_2, ..., a_k)$ 进行操作, 这里的 $1 \le a_i \le n$. 选定一个 $1 \le i \le k-1$, 若 a_i 和 a_{i+1} 在树中有边相连, 则可以交换 a_i, a_{i+1} 的位置. 若一个序列可以通过有限次交换变成另一个, 则称这两个序列等价. 记 $f(T)$ 是序列的等价类的个数, 求 $f(T)$ 的所有可能值.

答案 若 $n=2$, 则 $f(T)$ 的所有可能值为 $k+1$. 若 $n>2$, $f(T)$ 的所有可能值为 $\frac{(n-1)^{k+1}-1}{n-2}$.

解 对于正整数 m. 假设所有长度为 m 的等价类构成的集合为 A_m, 设 $|A_m| = t_m$. 设 X_i 为所有 i 开头的长度为 $m+1$ 序列的等价类构成的集合$(1 \le i \le n)$.

对于任意两个长度为 m 的序列, $a = (a_1, \ldots, a_m), b = (b_1, \ldots, b_m)$. 若有 a 与 b 等价, 则一定有 $(i, a_1, \ldots, a_m)$ 与 $(i, b_1, \ldots, b_m)$ 等价; 若 $(i, a_1, \ldots, a_m)$ 与 $(i, b_1, \ldots, b_m)$ 等价, 我们下面证明 a 与 b 等价.

考虑将 $(i, a_1, \ldots, a_m)$ 操作到 $(i, b_1, \ldots, b_m)$ 的操作过程, 记作 F. 在 F 中去掉所有交换 i 的操作变为操作过程 F'. 由于交换 i 和其它元素不改变除 i 以外的相对顺序. 故对序列 $(i, a_1, \ldots, a_m)$ 按 F' 操作可始终固定 i 不动得到 $(i, b_1, \ldots, b_m)$, 这告诉我们 a 与 b 等价.

所以两个 $i(1 \le i \le n)$ 开头的长度为 $m+1$ 的序列等价当且仅当去掉开头

得到的两个长度为 m 的序列等价. 由此我们可用去掉第一个元素的方法得到从 X_i 到 A_m 的双射.

至此, 我们证明了 $|X_i|=t_m$. 下面来计算 $|X_i\cap X_j|, i\neq j$.

对 $i\neq j$, 如果 X_i 中某个元素的代表元 $c=(c_1,\ldots,c_{m+1})$ 与 X_j 中某个元素的代表元 $d=(d_1,\ldots,d_{m+1})$ 等价.

考虑 d_1 在 $c=(c_1,\ldots,c_{m+1})$ 中的初始位置, 它在 c_1 的后方, 经操作后, 它变到 c_1 的前方. 由离散介值原理知存在一次操作交换 c_1 与 d_1, 则有 i,j 在 T 中相连.

同理可知, 若 d_1 在 c 中的对应项是 $c_p(p\geq 2)$, c_1 在 d 中的对应项是 $d_q(q\geq 2)$, 则 d_1 与 $c_1,\ldots,c_{p-1}$ 均有边相连, c_1 与 $d_1,\ldots,d_{q-1}$ 均有边相连. 所以可以进行操作, 把 $(c_1,\ldots,c_{m+1})$ 变成 $(c_1,d_1,c_2,\ldots,c_{p-1},c_{p+1},\ldots,c_{m+1})$.

同理可将 $(d_1,\ldots,d_{m+1})$ 变成 $(d_1,c_1,d_2,\ldots,d_{q-1},d_{q+1},\ldots,d_{m+1})$, 再交换 c_1 与 d_1, 可知 $(c_1,d_1,c_2,\ldots,c_{p-1},c_{p+1},\ldots,c_{m+1})$ 与 $(d_1,c_1,d_2,\ldots,d_{q-1},d_{q+1},\ldots,d_{m+1})$ 等价. 只要 $m\geq 2$, 就可再去掉开头的两位 c_1,d_1, 可知 $(c_2,\ldots,c_{p-1},c_{p+1},\ldots,c_{m+1})$ 与 $(d_2,\ldots,d_{q-1},d_{q+1},\ldots,d_{m+1})$ 等价.

而对于在 T 中有边的 i,j, 可以在 A_{m-1} 任意一个等价类的元素可以在前面分别添加 i,j 和 j,i, 可分别得到开头为 i,j 的两个序列, 且它们等价. 由此得到 $X_i\cap X_j$ 到 A_{m-1} 的一个双射.

至此, 我们证明了: 若 $m\geq 2, i\neq j$, 若 i,j 在 T 中相连, 则 $|X_i\cap X_j|=t_{m-1}$, 若 i,j 不在 T 中相连, 则 $|X_i\cap X_j|=0$.

对于 $m\geq 2$, 由于 T 是树, T 中不存在 3 点两两相连, 即 $\forall 1\leq i<j<k\leq n$, 有 $|X_i\cap X_j\cap X_k|=0$. 由容斥原理, 结合树有 $n-1$ 条边,

$$t_{m+1}=\left|\bigcup_{i=1}^{n}X_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|X_i|-\sum_{1\leq i<j\leq n}|X_i\cap X_j|=nt_m-(n-1)t_{m-1}.$$

而 $t_1=n, t_2=n^2-n+1$, 通过递推式可求得

$$f(T)=t_k=\begin{cases}k+1, & 若\ n=2,\\ \frac{(n-1)^{k+1}-1}{n-2}, & 若\ n\geq 3.\end{cases}$$

□

评注 这个题仔细想想会发现其实思路很自然, 就是通过递推和对应来处理. 我们先刻画出了 i 开头的两个序列等价的充要条件是去掉第一位等价. 再证明了, 对 $i\neq j$, i 开头的序列和 j 开头的序列等价, 当且仅当这两个序列都出现了 i,j, 且 i,j 在树中连边, 且去掉这两个序列中所对应的 i,j 后, 剩下 $k-2$

位仍然等价. 可以这样做下去, 比如对互不相等的 i_1, i_2, i_3, 有 i_1 开头, i_2 开头, i_3 开头的三个序列等价, 当且仅当这三个序列都出现了 i_1, i_2, i_3, 且 i_1, i_2, i_3 在树中两两连边, 且去掉这两个序列中所对应的 i_1, i_2, i_3 后, 剩下 $k-3$ 位仍然等价. 对一般的图 T, 也可以一直做下去, 最后利用容斥原理可以算出答案.

这个题放在第八题, 而题面给人一种答案依赖于 T 的错觉, 加之第 5 题上可能会浪费很多时间, 所以难度不小. 不过其递推的思路是很自然的, 是一道漂亮的题.

III. 总评

本次考试的第 4,5,8 题都不是太能做的题, 1 是在两道很难的陈题基础上改编的. 剩下的 2,3,6,7 题属于能做的题. 一般而言, 把能做的题都做对, 就可以得到不错的成绩了. 本次大约有 350 个学生参加考试, 有 41 个同学获得一等奖, 大约有 70 个同学获得二等奖.