# 一道不等式的最佳常数

解尧平

(天津市实验中学, 300074)

笔者曾经在新星征解第 28 期中提供了如下不等式问题:

**问题 1** 已知 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$, $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n \geqslant 0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = n$. 证明:

$$\prod_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < e^{\frac{n}{2}}.$$

黄嘉俊同学在文 [1] 中利用归纳法证明了如下结果:

**问题 2** 已知 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$, $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n \geqslant 0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leqslant A$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \leqslant A$. 证明:

$$\prod_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < \left(\frac{A}{n}\right)^n e^{\frac{n}{e}}.$$

近日, 笔者证明了下面一个更强的结果:

**问题 3** 已知 $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant 0$, $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_n \geqslant 0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = n$. 证明:

$$\prod_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < \lambda^n,$$

其中正实数 $\lambda$ 满足方程 $e\lambda \ln \lambda = 1$, 并且常数 $\lambda$ 是最佳的.

**证明** 首先证明两个引理.

**引理 1** 对任意正实数 $k$, 均有 $k^{\frac{1}{k+1}} \leqslant \lambda$.

修订日期: **2019-07-04.**

证明 设 $f(k)=k^{\frac{1}{k+1}}$, 则 $f'(k)=k^{\frac{1}{k+1}}\frac{1+\frac{1}{k}-\ln k}{(k+1)^2}$.

令 $g(k)=1+\frac{1}{k}-\ln k$, 则 $g(k)$ 在区间 $(0,\infty)$ 上单调递减, 而由 $\lambda$ 的定义知 $g(e\lambda)=0$, 故 $f(k)$ 在区间 $(0,e\lambda)$ 上单调递增, 在区间 $(e\lambda,\infty)$ 上单调递减, 因此 $f(k)_{\max}=f(e\lambda)=\lambda$.

引理 1 得证!

**引理 2** 若正实数 $\alpha,\beta,\gamma,a,b,c$ 满足

$$\begin{cases}(b+c)(\alpha+\beta)=\alpha+\beta+\gamma\\ \alpha a+\gamma c=\beta b\end{cases},$$

则 $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}<\lambda^{\alpha+\beta+\gamma}$.

证明 由齐次性, 不妨设 $\alpha+\beta+\gamma=1$, 经过化简, 结论等价于证明:

$$b\left(\frac{1}{b(1-\gamma)}-1\right)^{\gamma}\left(\frac{1-\frac{\gamma}{b(1-\gamma)}}{\alpha}-1\right)^{\alpha}<\lambda,$$

其中 $\frac{\gamma}{1-\gamma}<b<\frac{1}{1-\gamma}$. 由引理 1 可知:

$$\left(\frac{1-\frac{\gamma}{b(1-\gamma)}}{\alpha}-1\right)^{\alpha}=\left(\left(\frac{1-\frac{\gamma}{b(1-\gamma)}}{\alpha}-1\right)^{\frac{1}{1+\left(\frac{1-\frac{\gamma}{b(1-\gamma)}}{\alpha}-1\right)}}\right)^{1-\frac{\gamma}{b(1-\gamma)}}\leqslant\lambda^{1-\frac{\gamma}{b(1-\gamma)}}.$$

故只需证明:

$$b\left(\frac{1}{b(1-\gamma)}-1\right)^{\gamma}<\lambda^{\frac{\gamma}{b(1-\gamma)}}.$$

令 $b_1=b(1-\gamma)$, 则 $\gamma<b_1<1$, 上式等价于:

$$\left(\frac{b_1}{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{b_1}-1\right)<\lambda^{\frac{1}{b_1}}.$$

设函数 $f(\gamma)=\left(\frac{b_1}{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$, 则求导可知 $f(\gamma)$ 在区间 $(0,b_1]$ 上单调递增, 故结合引理 1 可知:

$$\begin{aligned}\left(\frac{b_1}{1-\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{b_1}-1\right)&<\left(\frac{b_1}{1-b_1}\right)^{\frac{1}{b_1}}\left(\frac{1}{b_1}-1\right)\\&=\left(\left(\frac{b_1}{1-b_1}\right)^{\frac{1}{1+\frac{b_1}{1-b_1}}}\right)^{\frac{1}{b_1}}\leq\lambda^{\frac{1}{b_1}}.\end{aligned}$$

引理 2 得证!

**回到原题.** 不失一般性, 可以不妨设 $(-1)^{i-1}(x_u-y_u)>0$, 其中 $\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+1\leq u\leq\alpha_1+\cdots+\alpha_i$, $i=1,2,\cdots,k$, 这里 $\alpha_0=0,\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in\mathbb{N}^*,k\geqslant 2$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i=n$.

由平均值不等式:

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}|x_i-y_i| =&\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_i}(-1)^{i-1}(x_j-y_j)\\ \leqslant&\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\sum\limits_{j=\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_i}(-1)^{i-1}(x_j-y_j)}{\alpha_i}\right)^{\alpha_i}.\end{aligned}$$

令 $x_i'=\frac{\sum\limits_{j=\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_i}(-1)^{i-1}(x_j-y_j)}{\alpha_i}$, $z_i=\min\{x_i,y_i\}$, $w_i=\max\{x_i,y_i\}$, 则 $x_i'>0$, 数列 $\{z_i\}$, $\{w_i\}$ 均单调不增, 并且由之前设定的序关系可知

$$z_{\alpha_1+\cdots+\alpha_i}\geqslant w_{\alpha_1+\cdots+\alpha_i+1}.$$

因此对于任意 $\alpha_1+\cdots+\alpha_{t-1}+1\leqslant u\leqslant\alpha_1+\cdots+\alpha_t$, 均有:

$$\begin{aligned}\sum_{i=t+1}^{k}x_i'=&\sum_{i=t+1}^{k}\frac{\sum\limits_{j=\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+1}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_i}(-1)^{i-1}(x_j-y_j)}{\alpha_i}\\ \leqslant&\sum_{i=t+1}^{k}(w_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}+1}-z_{\alpha_1+\cdots+\alpha_i})\\ \leqslant&\sum_{i=t+1}^{k}(z_{\alpha_1+\cdots+\alpha_{i-1}}-z_{\alpha_1+\cdots+\alpha_i})\\ =&z_{\alpha_1+\cdots+\alpha_t}-z_{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}\leqslant z_u.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}n=&\sum_{t=1}^{k}\sum_{i=\alpha_1+\cdots+\alpha_{t-1}+1}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_t}\frac{x_i+y_i}{2}\\ =&\sum_{t=1}^{k}\sum_{i=\alpha_1+\cdots+\alpha_{t-1}+1}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_t}\left(z_i+\frac{(-1)^{t-1}(x_i-y_i)}{2}\right)\\ \geqslant&\sum_{t=1}^{k}\sum_{i=\alpha_1+\cdots+\alpha_{t-1}+1}^{\alpha_1+\cdots+\alpha_t}\left(\frac{(-1)^{t-1}(x_i-y_i)}{2}+x_{t+1}'+\cdots+x_k'\right)\\ =&\sum_{t=1}^{k}\alpha_t(\frac{x_t'}{2}+x_{t+1}'+\cdots+x_k').\end{aligned}$$

故现在我们有限定条件:

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i=n, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i x_i'(-1)^{i-1}=0, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i(\frac{x_i'}{2}+x_{i+1}'+\cdots+x_k')\leqslant n. \tag{3}$$

接下来只需证明:

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\ln x_i'<n\ln\lambda.$$

不妨考虑不等式 (3) 等号成立的情形(最优情况), 并且我们将 $\alpha_i$ 的取值范围扩充为全体非负实数.

当 $k=2$ 时, 可以解得 $\begin{cases}x_1'=\frac{n}{\alpha_1}-1\\ x_2'=1\end{cases}$. 故结合引理 1 可得

$$\alpha_1\ln x_1'+\alpha_2\ln x_2'=\alpha_1\ln\left(\frac{n}{\alpha_1}-1\right)=n\ln\left(\left(\frac{n}{\alpha_1}-1\right)^{\frac{1}{1+\left(\frac{n}{\alpha_1}-1\right)}}\right)\leqslant n\ln\lambda.$$

当 $k\geqslant 3$ 时, 记点 $A_i=(x_i'(-1)^i,\frac{x_i'}{2}+x_{i+1}'+\cdots+x_k',\ln x_i')$, 并设点集 $\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 的凸包为 $T$, 则由熟知结论:

$$T=\left\{\frac{\alpha_1'\ \overrightarrow{OA}_1+\cdots+\alpha_k'\ \overrightarrow{OA}_k}{\alpha_1'+\cdots+\alpha_k'}\middle|\alpha_1',\cdots,\alpha_k'\in[0,+\infty)\right\}.$$

设

$$T\cap\{(0,1,k)|k\in\mathbb{R}\}=\{(0,1,k)|k\in[u,v]\},$$

则由等式 (1), (2), (3) 知 $\frac{\alpha_1\ln x_1'+\cdots+\alpha_k\ln x_k'}{\alpha_1+\cdots+\alpha_k}$ 的取值范围为 $[u,v]$, 故

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\ln x_i'\right\}=nv.$$

设点 $V(0,1,v)$,则由凸包 $T$ 的凸性知点 $V$ 在凸包 $T$ 的边界上, 故存在点集 $\{A_1,A_2,\cdots,A_k\}$ 中的三个点 $A_{i_1},A_{i_2},A_{i_3}$, 使得点 $V$ 在 $\triangle A_{i_1}A_{i_2}A_{i_3}$ 的内部或边界上, 因此存在和为 $n$ 的非负实数 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$, 使得

$$(0,n,nv)=\beta_1\ \overrightarrow{OA}_{i_1}+\beta_2\ \overrightarrow{OA}_{i_2}+\beta_3\ \overrightarrow{OA}_{i_3},$$

此时我们有:

$$\beta_1\ln x_{i_1}'+\beta_2\ln x_{i_2}'+\beta_3\ln x_{i_3}'=\max\left\{\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\ln x_i'\right\}.$$

故只需证明 $\beta_1\ln x_{i_1}'+\beta_2\ln x_{i_2}'+\beta_3\ln x_{i_3}'\leqslant n\ln\lambda$ , 并说明原不等式等号无法取到即可.

下面我们分两种情形进行讨论.

1)当 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 中含有 0 时, 可以不妨设 $\beta_3=0$ 及 $i_1<i_2$, 则 $i_1\equiv i_2\pmod 2$,

因此 $\begin{cases}\beta_1+\beta_2=n\\ \beta_1x'_{i_1}=\beta_2x'_{i_2}\\ \beta_1(\frac{x'_{i_1}}{2}+x'_{i_2})+\beta_2\frac{x'_{i_2}}{2}\leqslant n\end{cases}$, 由此可以解得 $\begin{cases}x'_{i_1}\leqslant\frac{n}{\beta_1}-1\\ x'_{i_2}\leqslant 1\end{cases}$.

故类似 $k=2$ 的情形可得:

$$\beta_1\ln x'_{i_1}+\beta_2\ln x'_{i_2}+\beta_3\ln x'_{i_3}\leqslant\beta_1\ln\left(\frac{n}{\beta_1}-1\right)\leqslant n\ln\lambda.$$

2) 当 $\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 中不含有 0 时, 可以不妨设 $i_1<i_2<i_3$.

我们再分三种小情形进行讨论.

a) 当 $i_1\equiv i_2\not\equiv i_3\pmod 2$ 时,

令 $\gamma_1=\beta_1+\beta_2$, $\gamma_2=\beta_3$, $y'_1=\frac{\beta_1x'_{i_1}+\beta_2x'_{i_2}}{\beta_1+\beta_2}$, $y'_2=x'_{i_3}$, 则 $\begin{cases}\gamma_1+\gamma_2=n\\ \gamma_1y'_1=\gamma_2y'_2\\ \gamma_1(\frac{y'_1}{2}+y'_2)+\gamma_2\frac{y'_2}{2}\leqslant n\end{cases}$,

故由 1) 可知 $\gamma_1\ln y'_1+\gamma_2\ln y'_2\leqslant n\ln\lambda$.

再由加权 Jensen 不等式可得

$$\beta_1\ln x'_{i_1}+\beta_2\ln x'_{i_2}\leqslant(\beta_1+\beta_2)\ln\frac{\beta_1x'_{i_1}+\beta_2x'_{i_2}}{\beta_1+\beta_2}=\gamma_1\ln y'_1.$$

故 $\beta_1\ln x'_{i_1}+\beta_2\ln x'_{i_2}+\beta_3\ln x'_{i_3}\leqslant\gamma_1\ln y'_1+\gamma_2\ln y'_2\leqslant n\ln\lambda$.

b) 当 $i_1\not\equiv i_2\equiv i_3\pmod 2$ 时, 与 a) 同理可推出结论.

c) 当 $i_1\equiv i_3\not\equiv i_2\pmod 2$ 时, 我们有:

$$\beta_1+\beta_2+\beta_3=n, \tag{4}$$

$$\beta_1x'_{i_1}+\beta_3x'_{i_3}=\beta_2x'_{i_2}, \tag{5}$$

$$\beta_1(\frac{x'_{i_1}}{2}+x'_{i_2}+x'_{i_3})+\beta_2(\frac{x'_{i_2}}{2}+x'_{i_3})+\beta_3\frac{x'_{i_3}}{2}\leqslant n. \tag{6}$$

不妨考虑不等式 (6) 等号成立的情形(最优情形), 此时我们得到

$$\begin{cases}(x'_{i_2}+x'_{i_3})(\beta_1+\beta_2)=\beta_1+\beta_2+\beta_3\\ \beta_1x'_{i_1}+\beta_3x'_{i_3}=\beta_2x'_{i_2}\end{cases},$$

故由引理 2 :

$$\beta_1\ln x'_{i_1}+\beta_2\ln x'_{i_2}+\beta_3\ln x'_{i_3}=\ln {x'_{i_1}}^{\beta_1}{x'_{i_2}}^{\beta_2}{x'_{i_3}}^{\beta_3}<\ln\lambda^{\beta_1+\beta_2+\beta_3}=n\ln\lambda.$$

综上, 我们证明了不等式 $\beta_1\ln x'_{i_1}+\beta_2\ln x'_{i_2}+\beta_3\ln x'_{i_3}\leqslant n\ln\lambda$, 并且根据取等条件可以推知原不等式无法取等. 由此我们证明了原不等式.

而另一方面, 令 $t=\left[\frac{n}{e\lambda+1}\right]$, 取 $x_1=x_2=\cdots=x_t=\frac{n}{t}$, $x_{t+1}=\cdots=x_n=0$, $y_1=y_2=\cdots=y_n=1$, 则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|\right)^{\frac{1}{n}}=\lambda$, 故常数 $\lambda$ 是最佳的. □

## 参考文献


[1] 黄嘉俊. 一道新星征解题的简证 [J]. 数学新星网 · 学生专栏, 2019-4-13 期.