谈谈数学学习的改进

冷 岗 松

上海大学数学系

2019 年 6 月 15 日 • 上海中学

幽兰有佳气,

久久自流芳.

——贺全国数学竞赛命题研讨会连续举办十周年

懂数学就是“做”数学，学生要经过收集资料，发现创造，将书本知识化为自己的思想，用自己的语言将数学知识重新组装起来.

——摘自全美数学教师理事会 (NCTM) 的报告

《学校数学课程原则与评价标准》

1. 成才的定义

- 社会精英;
- 评价标准与主流价值观;
- 研究数学与应用数学的职业学者;
- 优秀学者.

2. 成才比例的大小

- 决定数学竞赛活动的总体意义;
- 广受社会 (学界) 的关注 (质疑);
- 匈牙利、德国等很早就进行跟踪与统计;
- 有必要建立一个长期的分层级的跟踪统计体系.

3. 成才者的反馈

- 成才者怎么看待自己的竞赛经历;
- 正相关及内含;
- 重视他们的意见与建议;
- 宣传他们的成果 (数学文化建设的一部分).

二. 如何改进竞赛生的数学学习

- 整体来说是成功的, 只需改进 (改善).
- 建议改进点

1. 提升阅读水准 (除竞赛书外, 提倡读数学名著, 大学的分析高代教材, 甚至 Stein 系列);
2. 善于质疑与提问 (教师需展示提问的范例, 让提问成为一种学习的习惯);
3. 经常挑战难题 (培养专注力, 慢下来, 舍得付出时间, 哪怕一无所获);
4. 写作与总结 (写作是提炼, 提炼才能升华, 有利于语感形成);
5. 积极参加讨论与交流.

1. 关于有限集合的混合算术——几何平均不等式

1971 年, Carlson 在 SIAM Rev 上给出一个混合型的算术——几何平均值不等式:

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是非负实数, 记

$$a_i = \frac{x_1 + \cdots + x_n - x_i}{n-1}, \quad g_i = \left(\frac{x_1 \cdots x_n}{x_i}\right)^{\frac{1}{n-1}},$$

则对 $n \geq 3$, 有

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{g_1 + g_2 + \cdots + g_n}{n}.$$

三. 引导研究的实例

我们注意到这是关于关于 n 元集合中 $n-1$ 元子集的混合算术——几何平均不等式. 那么对 n 元集合中的 2 元子集的混合算术——几何平均不等式成立吗? 有反例.

什么时候有正面结果? 通过探索, 我们推测, 随后被当时华南师大附中的学生朱庆三证明. 这就是下面的定理 1.

定理 1

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n \mid x_i\geq 0, i=1,2,\cdots,n\}$. 对 $A\subseteq X$, 设 a_A 和 g_A 分别是 A 所有元素的算术平均值和几何平均值. 如果 k 是 $(\frac{n}{2},n]$ 上的整数, 则

$$\left(\prod_{\substack{|A|=k\\ A\subset X}} a_A\right)^{\frac{1}{C_n^k}} \geq \frac{1}{C_n^k}\left(\sum_{\substack{|A|=k\\ A\subset X}} g_A\right).$$

其中等号当且仅当 $X_1=\cdots=X_n$ 成立.

- 这个结果还被推广到一般的幂平均.

三. 引导研究的实例

定理 2

设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n \mid x_i\geq 0, i=1,2,\cdots,n\}$. 对 $A\subseteq X$, $p\in\mathbb{R}^+$, 令 a_{pA} 表示 A 中所有元素的 p 次幂平均, 即

$$a_{pA}=\left(\frac{\sum\limits_{x_i\in A} x_i^p}{|A|}\right)^{\frac{1}{p}},$$

如果是 k 是 $(\frac{n}{2},n]$ 上的整数且 $p>q>0$, 则

$$\left(\frac{\sum\limits_{\substack{|A|=k\\ A\subset X}}(a_{pA})^q}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{q}} \geq \left(\frac{\sum\limits_{\substack{|A|=k\\ A\subset X}}(a_{qA})^p}{C_n^k}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

其中等号成立当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n$ 成立.

- Leng–Si–Zhu, Mixed—mean inequalities for subsets, Proc.Amer.Math.Soc, 132(2004)
- 特别注意上面结果完全不同于序列的代数的混合算术几何平均不等式.

2. 存在非等腰三角形的最小点集

1999 年底, 当时黄冈中学学生袁新意在和我们讨论一个点集中等腰三角形个数的计数问题时, 袁突然冒出一句: 平面 7 点中似乎一定存在三点组成一个非等腰三角形. 于是, 我们鼓励他深入研究这个有趣的问题, 从而产生了下面这个问题.

问题

求最小的正整数 n ($n \geq 3$), 使得平面内任意无三点共线的 n 个点中, 必有三点是一个非等腰三角形的顶点. (2005年国家集训队试题)

- 这是一个对严谨性要求较高的中等偏难的问题.

3. 单调子序列问题

定理 1 (Erdös-Szekeres)

n^2+1 个实数的序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{n^2+1}$ 一定包含一个长为 $n+1$ 的单调递增子序列或长为 $n+1$ 个的单调递减子序列.

定理 2 (Erdös-Szekeres)

每一个无穷子序列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ 一定包含一个单调递增的无穷子序列或一个单调递减的无穷子序列.

三. 引导研究的实例

针对不少学生不理解“任意长”和“无限长”的差别. (认为可在定理 1 中取极限立得定理 2) 我们设计了下面连串问题.

- 是否存在一个无穷序列, 包含任意长的单增 (递减) 子序列, 而不包含无限长的单增 (递减) 子序列?
- n^2+1 最优吗?
- 是否存在一个无穷序列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ 包含一个无限的单增子列, 且包含一个任意长的单减子序列, 但不包含无限长的单减子序列?
- 一个无穷序列如果包含一个单增的无限子序列, 那么它的开始的 n^2+1 项中是否一定包含一个长为 $n+1$ 的单增子序列?

三. 引导研究的实例

当时上海格致中学的顾超给出了一个例子回答了上面的所有问题:

例子

$2,\ 1 \mid 5,\ 4,\ 3 \mid 10,\ 9,\ 8,\ 7,\ 6 \mid 17, \cdots \mid n^2+1,\ n^2, \cdots, (n-1)^2+2 \mid (n+1)^2+1, \cdots$

请逐一验证:

(1) 存在任意长的递减子序列, 不存在无限长的递减子序列;

(2) 存在无限长的递增子序列;

(3) 开始的 n^2+1 项仅存在单减的 $n+1$ 项的子序列;

(4) 开始的 n^2 项中既无长为 $n+1$ 的单增子序列, 也无 $n+1$ 项的单减子序列.

4. 一类多项式根的分布

命题 1 (Eneström-Kekeya)

设 $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ 且 $a_0\geq a_1\geq\cdots\geq a_n>0$, 则 $P(z)$ 的所有根都位于单位圆盘内.

- 这是一个应用广泛的优雅结果.

提问 1

如何对以正递增序列为序数的多项式的根制定一个更精确的范围(依赖于序列本身的变化率)?

- 估计 $\{a_i\}$ 变化率的两种尺度 $\begin{cases} a_i - a_{i+1} \\ \dfrac{a_i}{a_{i+1}}, \end{cases}$
- 记 $r = \min\limits_{1\le i\le n-1} \frac{a_i}{a_{i+1}}$, $R = \max\limits_{1\le i\le n-1} \frac{a_i}{a_{i+1}}$, 并称 $R - r$ 为 $\{a_i\}$ 的振幅. 这样应用命题 1 产生了对一般正数序列 (不限于递增正数序列) 的结果.

命题 2

设 $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0$ 其中 $a_i>0,\ i=0,1,\cdots,n$, 则 $P(z)$ 的所有根 $z\in\{z\mid r\leq|z|\leq R\}$.

进一步, 我们注意到 2014 年普特南试题:

设 $P_n(x)=1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$, 证明: 对 $\forall j\neq k,\ j,k\in N^*$, 有 $(P_j(x),P_k(x))=1$.

于是提出下面

提问 2

设 $\{a_n\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个递增的正实数序列, 记 $P_n(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_n x^{n-1}$, 问: $(P_j(x), P_k(x)) = 1$ 对 $j \neq k$ 成立吗?

两个测试序列: 等差数列与等比数列 (前者肯定, 后者否定). 通过研究, 有些同学得了对单增正的等差数列的版本, 少数同学得到下面更一般的版本.

命题 3

设正数递增序列 $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ 满足 $a_i^2 \geq a_{i+1}a_{i-1}$, $i = 2, 3, \cdots$, 记 $P_n(x) = a_1 + a_2x + \cdots + a_nx^{n-1}$, 则 $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 中任何两个多项式的根是不同的, 且 $\{P_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 中每个多项式的根都位于单位圆内.

5. Figalli 不等式的最优常数

2018 年的菲尔兹奖得主 Figalli 在 Invent. Math. (2010) 用分析方法证明了下面引理.

引理

设实数 $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$, 记 λ_K, λ_G 分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 的算术平均值和几何平均值. 则

$$7n^2(\lambda_K - \lambda_G) \ge \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}(\lambda_K - \lambda_G)^2.$$

三. 引导研究的实例

湖南师大附中学生罗横溢等用初等方法证明了上述不等式，并将系数改进到 $5n-4$.

随后上海中学学生黄嘉俊证明了具有最优常数的如下结果.

定理

设实数 $0<\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$，记 λ_K, λ_G 分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 的算术平均值和几何平均值. 则

$$2n\left(\lambda_K-\lambda_G\right)\ge\frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{n}\left(\lambda_K-\lambda_G\right)^2.$$

且 $2n$ 是最优的.

6. n^n 的平方表示

饶家鼎曾证明 2012^{2012} 可表示成不被 2012 整除的若干整数的平方和. 浙江知临中学学生韩新淼推广了这个结果, 证明了

问题

设 $n \in N^*$ 不为 2 的幂, 证明:

$$n^n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$$

其中 a_i 为正整数且 $n \nmid a_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$. (2019 春季 NSMO)

三. 引导研究的实例

- 韩的美感与抽象能力;
- 难度的评估 (余红兵教授的眼光);
- 韩的另一个工作, 他建立了如下

定理

如果平面上的一个凸形可以用一条不自交的曲线 (此曲线两端点在凸形边界上, 且其余部分严格位于凸形内部) 划分为两部分, 满足这两部分非凸且顺向全等, 则原凸形为中心对称图形.

三. 引导研究的实例

- 若将条件顺向全等改为一般全等, 结论不再成立;
- 动机: "平面上的中心对称图形可分成全等的两部分, 且形状可以多变." 韩研究这个性质的反问题.
- 意义: 非凸形平面镶嵌的必要条件.

7. 涉及两组实数的优化不等式

天津实验中学解尧平提出并证明了如下问题:

题 1

已知 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq 0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = n$. 证明:

$$\prod_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < e^{\frac{n}{2}}.$$

(新星征解第 28 期问题)

- 这是一个优雅的问题.

黄嘉俊后来证明了它的一个加强版本 (刊于新星网学生专栏).

题 2

设 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n \geq 0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq A$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i \leq A$, 证明:

$$\prod_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < \left(\frac{A}{n}\right)^n e^{\frac{n}{e}}.$$

三. 引导研究的实例

随后, 解尧平证明了如下具有最优估计的版本 (将刊于新星网学生专栏).

题 3

设 n 是给定的正整数, 实数 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n$, $y_1 \geq y_2 \geq \cdots \geq y_n$, 且

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = n,$$

证明:

$$\prod_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \lambda^n.$$

其中正实数 λ 为方程 $ex\ln x = 1$ 的根, 且这个常数是最优的.

四. 值得关注的评析系列文章——交流感悟

为了帮助竞赛生改进数学学习, 有必要提供强有力的高质量的素材. 为此, 我们组织学生高手撰写一些重要比赛试题的评析文章, 已推出的主要系列评析文章为:

- 1. CMO 系列;
- 2. 美国 USAMO, USATST 两个系列 (2019 年是谢柏庭等人的文章);
- 3. 俄罗斯奥林匹克系列 (2019 年是袁祉祯的文章);
- 4. 清北金秋营试题系列 (孙孟越);

- 5. 圣彼得堡组合系列;
- 6. 大都市 (IOM) 系列;
- 7. 哈佛—麻省 (二月试题) 系列 (2019 年是杨铮的文章);
- 8. 新星奥林匹克系列;
- 9*. 各国 (俄罗斯, 巴西, 伊朗等) 几何试题系列 (罗振华, 熊斌).

• 评析文章包含精彩的解法 (可能是多种), 有难度评估, 有关联分析, 难点分析, 切入点说明. 概括之: 有感悟!

谢　　谢！