

数学新星问题征解

第三十三期 (2019.06)

主持: 牟晓生

第一题. 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, D 为 BC 边上一点 (不是中点), I_1, I_2 为 $\triangle ABD, \triangle ACD$ 的内心. $\triangle CI_1I_2, \triangle BI_1I_2$ 的外接圆分别与直线 BC 交于另外两点 E, F . 证明: EI_1, FI_2, AD 三线共点.

(广西钦州 卢圣 供题)

第二题. $\triangle ABC$ ($AB \neq AC$) 的外接圆为圆 O , 内切圆为圆 I , 圆 I 与边 BC 切于点 D , 设三角形 AID 的外接圆为圆 J , 与圆 I, O 分别交于另一点 E, H .

(1) 圆 J 与直线 AC 交于点 F , 与直线 AB 交于点 G , 直线 FE, GE 分别交圆 I 于 P, Q . 直线 BC 与 FG 交于 R . 求证: P, Q, R 三点共线.

(2) 直线 BH, CH 分别交圆 J 于 K, L . KE, LE 分别与圆 I 交于 M, N . 求证: $MN \parallel BC$ 且与直线 PQ 关于直线 IJ 对称.

(江苏省海门中学学生 朱嘉奕 供题)

第三题. 设 $1 \leq u \leq t$ 为正整数. 证明:

$$\sum_{j=0}^u (-1)^j \binom{t+1}{j} (u-j)^t > 0.$$

(上海中学学生 杨铮 供题)

第四题. 证明: 对每个正整数 n , 都有一个 n 次实系数多项式 $P(x)$, 满足

$$|P(x) - \arctan(x)| \leq 2 \cdot (\sqrt{2} - 1)^n, \forall x \in [-1, 1].$$

(耶鲁大学 牟晓生 供题)