好题与妙解（八）

——2019 年新星春季精品营两次测试题解析

冷岗松　罗振华　吴尉迟

2019 年 4 月, 上海数学新星秋季精品营举行了两次测试 (小考). 每次测试四道题, 时间为两个半小时. 这两次测验试题有趣、难度适中, 下面就介绍这些试题及给出相应的解答. 我们将用题 $1.x$ 表示第 1 次测试的第 x 题, 题 $2.y$ 的意义类似.

I. 试 题

题 1.1 已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, P 为 CB 延长线上一点且满足 $AB = BP, Q$ 为 BC 延长线上一点且满足 $AC = CQ$. $\triangle ABC$ 的顶点 A 所对应的旁切圆 $\odot J$ 切 AB, AC 延长线于 D, E. 直线 DP 与 EQ 交于点 F, 证明: $AF \perp FJ$.

题 1.2 一个学校有 300 个学生, 其中不存在三个学生, 他们两两是朋友. 已知每位学生至多有 n 个朋友, 且对每个正整数 $m(1 \leq m \leq n)$, 存在一个学生, 其恰有 m 个朋友. 求 n 的最大值.

题 1.3 已知正实数 a 是方程

$$z^n + (\mathrm{Re}\, a_{n-1})z^{n-1} - |a_{n-2}|z^{n-2} - \cdots - |a_1|z - |a_0| = 0$$

的根, 其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为复数. 证明: 多项式

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

的根 z 满足 $\mathrm{Re}\, z \leq a$.

题 1.4 设 $b > 1$ 是整数. 对每个正整数 n, 令 $u_b(n)$ 为 n 在 b 进制表示下的非零数字的个数. 证明: 对于任意给定的正整数 n 和 k, 存在正整数 m 使得 $u_b(mn) = u_b(n) + k$.

收稿日期: 2019-05-04.

题 2.1 设 $n \geq 2$ 是给定的整数, 求最小的常数 $\lambda = \lambda(n)$ 使得不等式

$$\frac{a_1 - b_1}{a_1 + b_1} + \frac{a_2 - b_2}{a_2 + b_2} + \cdots + \frac{a_n - b_n}{a_n + b_n} \leq \lambda$$

对所有满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ 的正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 均成立.

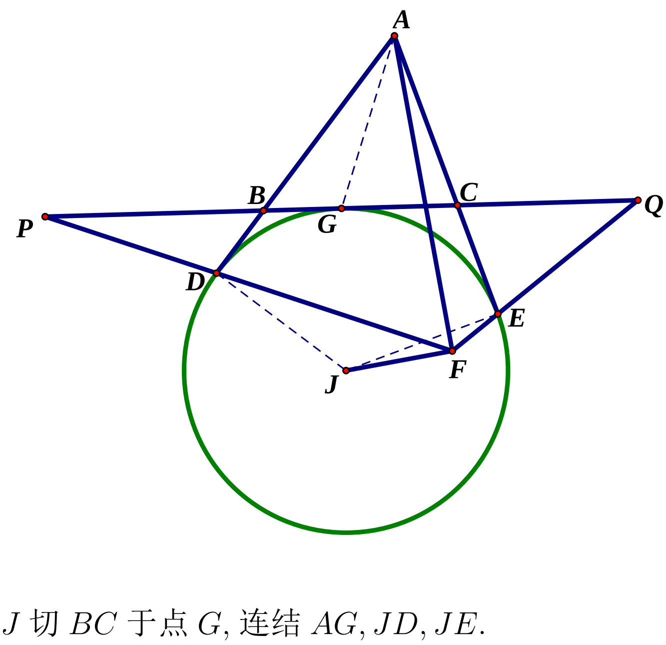
题 2.2 n 个选手参加一比赛, 每两个人至多进行一场比赛, 且没有平局. 已知对于任一由不超过 m 个选手构成的集合 X, 存在一名不属于 X 的选手, 其击败过 X 中所有选手. 证明: $m + 1 \leq \lfloor \log_2(n+1) \rfloor$.

题 2.3 在非等腰 $\triangle ABC$ 中, 点 M 是边 BC 中点, 以 AM 为直径的圆交 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 与另一点 A'. 点 A' 在 AB, AC 上的射影分别为 D, E. 证明: 过点 M 且与 AO 平行的直线平分线段 DE.

题 2.4 证明: 存在无穷多个正整数 n, 使得 n 不能写成 $2^a + 3^b - 5^c$ 的形式, 其中 a, b, c 是非负整数.

II. 解 答

题 1.1 已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, P 为 CB 延长线上一点且满足 $AB = BP$, Q 为 BC 延长线上一点且满足 $AC = CQ$. $\triangle ABC$ 的顶点 A 所对应的旁切圆 $\odot J$ 切 AB, AC 延长线于 D, E. 直线 DP 与 EQ 交于点 F, 证明: $AF \perp FJ$.



证明 设 $\odot J$ 切 BC 于点 G, 连结 AG, JD, JE.

由 AD, AE 是 $\odot J$ 的切线知 A, D, J, E 四点共圆, 且该圆以 AJ 直径. 注意到 $BD = BG$, 又 $BP = BA$, 所以 $\triangle BDP \cong BAG$, 于是 $\angle PDB = \angle AGB$. 同

理, $\angle QEC = \angle AGC$. 从而

$$\angle ADP + \angle AEQ = \angle AGB + \angle AGC = 180^\circ,$$

故

$$\angle ADF + \angle AEF = 360^\circ - (\angle ADP + \angle AEQ) = 180^\circ,$$

所以 A, D, F, E 四点共圆. 从而 A, D, J, F, E 五点共圆, 且 AJ 为这个圆的直径, 故 $AF \perp FJ$. □

评注 这是一道简单的几何题, 得分率约 94%. 解题的关键是利用全等三角形和导角, 得到 A, D, F, E 四点共圆, 从而证得结论.

题 1.2 一个学校有 300 个学生, 其中不存在三个学生, 他们两两是朋友. 已知每位学生至多有 n 个朋友, 且对每个正整数 $m(1 \le m \le n)$, 存在一个学生, 其恰有 m 个朋友. 求 n 的最大值.

解 n 的最大值为 200.

将问题转化为图论问题, 用 $A_i(1 \le i \le 300)$ 表示第 i 个学生, 若 A_i, A_j 是朋友, 则 A_iA_j 连边, 记所得的图为 G, 题目条件变为:

(1) G 中不存在三角形;

(2) 每个点的度小于等于 n;

(3) 存在度为 $m(1 \le m \le n)$ 的点.

我们构造 300 个点的二部图. 第一组为 $A_1, \cdots, A_{100}$, 第二组为 $A_{101}, A_{102}, \cdots, A_{300}$, 其中, $A_i(i = 1, \cdots, 100)$ 与 $A_{100+i}, \cdots, A_{300}$ 连边, 则

$$d(A_i) = 201 - i, 1 \le i \le 100, d(A_{100+j}) = j, 1 \le j \le 200,$$

满足条件.

下证 $n \le 200$.

取度为 n 的点, 不妨设为 A_{n+1}, 且该点与 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 有边. 故由该图无三角形知, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任两点无边, 故其中任意点的度至多为 $300 - n$. 从而度为 $301 - n$ 到 $n - 1$ 的点均在 $A_{n+2}, \cdots, A_{300}$ 中, 于是有

$$n - 1 - (301 - n) + 1 \le 300 - (n + 2) + 1,$$

即有 $n \le 200$. □

评注 此题是中等难度的组合题, 得分率约 63%. 此题的关键是考查朋友最

多的学生, 利用题设条件对该学生的朋友和剩余的学生进行分析, 从而得到 n 的范围. 构造是相对容易的.

题 1.3 已知正实数 a 是方程

$$z^n + (\mathrm{Re}\, a_{n-1})z^{n-1} - |a_{n-2}|z^{n-2} - \cdots - |a_1|z - |a_0| = 0$$

的根, 其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 为复数. 证明: 多项式

$$f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

的根 z 满足 $\mathrm{Re}\, z \le a$.

证明 用反证法.

设 $f(z)$ 的根 z 满足 $\mathrm{Re}\, z > a$, 则 $a^{-1} > (\mathrm{Re}\, z)^{-1} > |z|^{-1}$, 且

$$|z + a_{n-1}| \ge \mathrm{Re}(z + a_{n-1}) > a + \mathrm{Re}\, a_{n-1}.$$

由题设条件知

$$a + \mathrm{Re}\, a_{n-1} = |a_{n-2}|a^{-1} + |a_{n-3}|a^{-2} + \cdots + |a_0|a^{-(n-1)}.$$

结合上面两式与 $a^{-1} > |z|^{-1}$ 知,

$$\begin{aligned} |z + a_{n-1}| &\ge |a_{n-2}|a^{-1} + |a_{n-3}|a^{-2} + \cdots + |a_0|a^{-(n-1)} \\ &> |a_{n-2}||z|^{-1} + |a_{n-3}||z|^{-2} + \cdots + |a_0||z|^{-(n-1)}, \end{aligned}$$

两边同乘以 $|z|^{n-1}$ 可得,

$$|z^n + a_{n-1}z^{n-1}| - |a_{n-2}||z|^{n-2} - \cdots - |a_0| > 0,$$

再结合三角不等式可知,

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \\ &\ge |z^n + a_{n-1}z^{n-1}| - |a_{n-2}||z|^{n-2} - \cdots - |a_0| > 0, \end{aligned}$$

这与 z 是 f 的根矛盾! 故有 $\mathrm{Re}\, z \le a$. □

评注 这是一道有一定难度的代数问题, 约 25% 的学生做出. 该问题的题面新颖, 但处理问题的手法却是典型的: 即将根代入原方程后除以它的最高次幂或第二高次幂, 从而转化为它的模的倒数的方程来处理, 通常这种方法叫做刘维尔方法.

题 1.4 设 $b > 1$ 是整数. 对每个正整数 n, 令 $u_b(n)$ 为 n 在 b 进制表示下的非零数字的个数. 证明: 对于任意给定的正整数 n 和 k, 存在正整数 m 使得 $u_b(mn) = u_b(n) + k$.

证明 对 k 用归纳法.

先证 $k=1$ 的情形.

令 $n=\sum\limits_{i=0}^{d-1} c_i b^i$, 其中 $c_i\in\{0,1,\ldots,b-1\}, d=\lfloor\log_b(n)\rfloor+1$.

设 c_j 是最小的指标使得 $c_j\neq 0$. 我们分两种情况:

(i) $c_j\geq 2$. 取正整数 r,s, 满足 $r>s+d>2d$ 且 $n\mid b^r-b^s$. 则

$$M=b^r-b^s+b^{s-j}n\equiv 0 \pmod n,$$

于是,

$$M=b^r+\sum_{i=j+1}^{d-1} c_i b^{i+s-j}+(c_j-1)b^s,$$

从而 $u_b(M)=u_b(n)+1$, 此时令 $m=\frac{M}{n}$ 即可.

(ii) $c_j=1$, 取正整数 r,s, 满足 $r>s+d>2d$ 且 $n\mid b^r-b^s$. 则

$$M=b^r-b^s+b^{s-j+1}n\equiv 0 \pmod n,$$

于是

$$M=b^r+\sum_{i=j+1}^{d-1} c_i b^{s-j+1+i}+(b-1)b^s,$$

故 $u_b(M)=u_b(n)+1$, 令 $m=\frac{M}{n}$ 即可.

这就证明了 $k=1$ 的情形.

假设 k 时成立, 考虑 $k+1$ 时的情形.

由归纳假设, 存在 m_k, 使得 $u_b(m_k n)=u_b(n)+k$. 再由 $k=1$ 的情形知, 存在 m, 使得

$$u_b(mm_k n)=u_b(m_k n)+1=u_b(n)+k+1.$$

此时, 取 $m_{k+1}=mm_k$ 即可. □

评注 本题是难度较大的数论题, 只有不到 8% 的学生做对此题. 一个基本的观察是只需证明 $k=1$ 的情形, 之后比较自然的想法是对 n 的 b 进制下的非零数码进行调整, 调整的策略如下: 考虑 n 的首个非零数码, 若它大于 1 , 则将这一位减少 1 , 前面若干位加上 1 , 由于 b 与 n 可能不互素, 再在末位补上一些 0 即可满足条件; 若首个非零数码等于1, 则把前述方案稍作变化仍可适用.

题 2.1 设 n 是任意给定的正整数, $n\geq 2$, 求最小的常数 $\lambda=\lambda(n)$ 使得不等式

$$\frac{a_1-b_1}{a_1+b_1}+\frac{a_2-b_2}{a_2+b_2}+\cdots+\frac{a_n-b_n}{a_n+b_n}\leq\lambda$$

对所有满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

的正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ 均成立.

解 $\lambda(n)=n-1$.

一方面, 由于 $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$, 故存在 $i_0\in\{1,2,\cdots,n\}$, 使 $b_{i_0}\geq a_{i_0}$, 所以 $\frac{a_{i_0}-b_{i_0}}{a_{i_0}+b_{i_0}}\leq 0$. 对 $i\neq i_0$,

$$\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}\leq\left|\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}\right|<1.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}=\sum_{i\neq i_0}\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}+\frac{a_{i_0}-b_{i_0}}{a_{i_0}+b_{i_0}}<n-1+0=n-1.$$

另一方面, 令 $a_2=\cdots=a_n=1,b_2=\cdots=b_n=\frac{1}{p}$,

$$a_1=p,b_1=p+(n-1)\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

其中 $p>n$, 则有 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$, 且当 $p\to\infty$ 时,

$$\frac{a_1-b_1}{a_1+b_1}\to 0,\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}\to 1,i=2,3,\cdots,n.$$

从而 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}\to n-1$. □

评注 这是一道中等难度的代数题, 得分率为 42%. 对 $a_i>b_i$的情形, $\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}$ 的最佳上界为 1; 对 $a_i\leq b_i$ 的情形, $\frac{a_i-b_i}{a_i+b_i}$ 的最佳上界为 0. 由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$, 满足 $a_i>b_i$ 的 i 至多 $n-1$ 个, 故所求式的最佳上界为 $n-1$. 趋于最佳常数的例子很好构造.

题 2.2 n 个选手参加一比赛, 每两个人至多进行一场比赛, 且没有平局. 已知对于任一由不超过 m 个选手构成的集合 X, 存在一名不属于 X 的选手, 其击败过 X 中所有选手. 证明: $m+1\leq\lfloor\log_2(n+1)\rfloor$.

证明 先转换为图论语言. 将 n 选手看成有向图的顶点, 若选手 u 胜了 v, 则连一条从 u 到 v 的边, 记所得的图为 G.

所证不等式等价于 $n\geq 2^{m+1}-1$.

对 m 用归纳法.

当 $m=1$ 时, 若 $n=2$, 则由条件, 则其中任一点到另一点有边, 这与条件矛盾. 故 $n\geq 3$.

假设命题对 $m-1$ 成立. 下证 m 时的情形.

令 $d^-(w)$ 表示顶点 w 的入度. 则

$$\sum_{w\in V(G)} d^-(w) \le \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$

其中 $V(G)$ 表示 G 的顶点集. 由抽屉原理, 存在顶点 v 使 $d^-(v) \le \frac{n-1}{2}$.

令 V' 表示所有到 v 有边的顶点构成的集合, 易知 $|V'| \ge m$. 对 V' 的任一个不超过 $m-1$ 元子集 X, 由条件, G 中存在一顶点 u, 使 u 到 $X\bigcup\{v\}$ 中任一点有边. 因此, $u \in V'$.

这说明, 对于 V' 中任一不超过 $m-1$ 元子集 Y, 均存在 V' 一点, 该点到 Y 中任一点有边. 故有归纳假设知 $|V'| \ge 2^{(m-1)+1}-1$. 从而

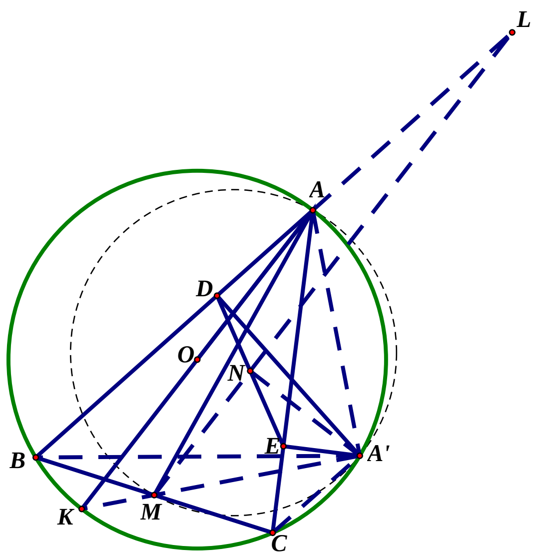
$$\frac{n-1}{2} \ge d^-(v) = |V'| \ge 2^m - 1.$$

即有 $n \ge 2^{m+1}-1$. 得证. □

评注 这是一道有一定难度的图论题, 得分率为 18% . 解题的思路是在归纳法中取出入度最少的点, 考虑到这点有边的顶点构成的集合, 利用归纳假设可以证得结论.

题 2.3 在非等腰 $\triangle ABC$ 中, 点 M 是边 BC 中点, 以 AM 为直径的圆交 $\triangle ABC$ 的外接圆 $\odot O$ 与另一点 A'. 点 A' 在 AB, AC 上的射影分别为 D, E. 证明: 过点 M 且与 AO 平行的直线平分线段 DE.

证法一 (吉大附中艾一夫) 设 A 的对径点为 K. 由于 $\angle AA'M = 90°$, 故 K, M, A' 共线.



注意到

$$\angle EDA' = \angle EAA' = \angle CAA' = \angle CBA',$$

$$\angle DA'E = \angle DAC = \angle BAC = \angle BA'C,$$

于是 $\triangle A'DE \sim \triangle A'BC$.

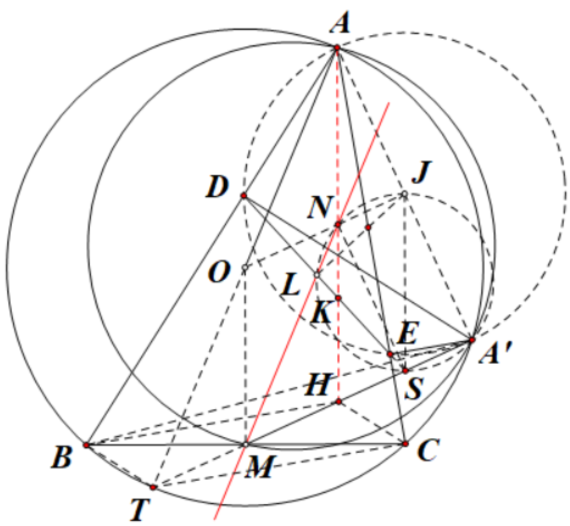
设 N 是 DE 的中点, 那么, $\triangle A'DN \sim \triangle A'BM$, 从而 $\triangle A'DB \sim A'NM$.

设直线 NM 与 AB 的交点为 L, 则

$$\angle BLM = \angle DA'N = \angle BA'M = \angle BA'K = \angle BAO,$$

于是 $MN \perp AO$. $\square$

证法二 (卢圣) 延长 AO 与圆 O 交于 T, 设H 为 $\triangle ABC$ 的垂心, L, N, J 为 DE, AH, AA' 的中点, 直线 DE, MA' 交于 S.



易知 $TB \perp BA, TC \perp CA$. 则 $TB \parallel CH, CT \parallel BH$. 从而四边形 $BTCH$ 为平行四边形. 这推出 T, M, H 共线. 易知 $TA' \perp A'A, MA' \perp A'A$. 所以 T, M, A' 共线. 故 T, M, H, A' 四点共线.

由中位线的性质知 O, N, J 共线且该线平行于 TA'. 由 Steiner 定理 (Steiner 定理是指三角形的外接圆上一点关于三角形的 Simson 线平分该点与三角形垂心构成的线段)知 S 为 $A'H$ 中点. 从而 $NS \parallel AA', JS \parallel AH$. 故 $SN \perp NJ$.

易知 A, D, E, A' 四点共圆且圆心为 J, 则 $JL \perp LS$. 所以 J, N, L, S 四点共圆. 由

$$\angle DKA = \angle HAC + \angle DEA = \angle HAC + \angle DA'A$$

$$= 90^\circ - \angle ACB + 90^\circ - \angle BAA'$$

$$= 180° - \angle AA'B - \angle BAA'$$
$$= \angle ABA' = \angle ATA' = \angle AON.$$

可知 $\angle ONL = \angle JSD = \angle AKD = \angle AON$. 故 $NL \parallel AO$.

由外心, 垂心性质知 $OM = \frac{1}{2}AH = AN$,且 $OM \parallel AH$. 所以 OM 平行且相等于 AN. 所以四边形 $AOMN$ 为平行四边形. 所以 $MN \parallel AO$. 所以 M, L, N 三点共线且该线平行于 AO. 所以过 M 且平行于 AO 的直线平分 DE. □

评注 这是一道中等难度的几何题, 得分率为 51% . 本题的解法较多, 也蕴含了许多结论. 解法 1 涉及两圆相交所产生的一组相似, 以及相似对应点的使用. 解法 2 综合利用了 Simson 线,垂心,外心和中点的性质.

题 2.4 证明: 存在无穷多个正整数 n, 使得 n 不能写成 $2^a + 3^b - 5^c$ 的形式, 这里 a, b, c 是非负整数.

证法一 我们证明形如 $6k + 1(k \geq 1)$ 的整数不能表示成 $2^a + 3^b - 5^c$ 的形式.

若不然, 设 $6k + 1 = 2^a + 3^b - 5^c$.

若 $a \geq 1$, 则 $1 \equiv 3^b - 5^c \pmod 2$, 这与 $3^b, 5^c$ 均为奇数矛盾.

于是 $a = 0$. 若 $b = 0$, 则只有 $c = 0$ 时, $2^a + 3^b - 5^c$ 才是正整数. 但此时 $2^a + 3^b - 5^c = 1 < 7$, 矛盾.

若 $b \geq 1$. 则 $0 \equiv 0 - 5^c \pmod 3$, 不成立.

故形如 $6k + 1(k \geq 1)$ 的整数不能表示成 $2^a + 3^b - 5^c$ 的形式. □

证法二 我们证明当 $n \equiv 7 \pmod{12}$ 时, n 不能写成 $2^a + 3^b - 5^c$ 的形式.

注意到

$$2^a \equiv 1, 2, 4, 8 \pmod{12}, \quad 3^b = 1, 3, 9 \pmod{12}, \quad 5^c = 1, 5 \pmod{12},$$

若存在非负整数 a, b, c, 使 $2^a + 3^b - 5^c \equiv 7 \pmod{12}$, 我们分两种情况.

1) 若 $5^c = 1 \pmod{12}$, 则 $2^a + 3^b \equiv 8 \pmod{12}$, 检验知, 不成立.

2) 若 $5^c = 5 \pmod{12}$, 则 $2^a + 3^b \equiv 0 \pmod{12}$, 检验知, 不成立.

故不存在非负整数 a, b, c, 使 $2^a + 3^b - 5^c \equiv 7 \pmod{12}$. 从而当 $n \equiv 7 \pmod{12}$ 时, n 不能写成 $2^a + 3^b - 5^c$ 的形式. □

评注 这是一道中等难度的数论题, 得分率为 42%. 这类问题用同余方法是常见的思路, 关键是选取合适的模. 这里模 6 和模 12 都是可行的. 本题的难度我们在选题时没有准确评估.