谈谈数学表达

冯跃峰

如何书写数学数学问题的解答, 一直是困扰众多学生的一个棘手问题.

有的唯恐写得不全, 不管有用的没用的, 全都写上, 密密麻麻写了一大片, 却不得要领, 大都是废话. 种种情况, 屡见不鲜.

有的则如"蜻蜓点水", 仅仅列举一些"中途结论", 而这些结论如何获得却在解答中难觅踪影. 这是解题的另一个极端, 但有相当大的市场, 不乏推崇追随者. 有的对别人指出他解答的不严密常常不以为意, 甚至这样反驳:"你说这样不行, 那你举个反例我看看". 殊不知, 所谓"不行", 并不是说你解答中的结论错误, 而是说你没有讲清楚结论成立的依据. 由于结论本身就是对的, 谁又能举出反例? 问题是由你给出证明的, 当然要由你"举证", 而且, 你给出的理由必须使别人信服, 以读者不会问你"为什么"为基准.

笔者认为, 要把一个解答写得很简短是非常容易的, 尤其是所谓一句话就可说清的"秒杀"则更是如此. 读者如若不信, 则请看下面笔者"独创的"的"万能证题法", 它对一切证明题都是适用的.

万能证题法: 因为有条件 1, 又有条件 2, 再加上条件 3, 结合定理 $\times\times$, 所以结论成立.

你说上面的证明有问题? 那你举个反例试试!

哈哈, 你也被呛得哑口无言吧? 但你当然不会承认上面的解答. 有鉴如此, 本文谈谈究竟应如何规范书写数学问题的解答.

毋容置疑, 数学表达依赖于一定的语言文学基础, 需要有一定的语言表达基本功. 实际上, 数学表达有与其他表达通用的一些基本要求, 如: 逻辑清楚, 层次分明, 用词准确, 符号规范等.

除上述一些基本要求外, 数学表达还需遵循以下一些"潜规则", 这些规则尽管没有具体条文硬性规定, 但早已约定俗成. 这里, 笔者借用伟人的词句, 将之概

修订日期: 2019-04-18.

括为三大"纪律"与八项"注意".

值得指出的是, 这些"潜规则"不过是笔者在数学学习中得到的一些领悟, 可能有失偏颇, 谬误难免, 敬请读者指正.

1. 三大"纪律"

纪律 1: 从"0"开始.

所谓从"0"开始, 是指数学解答中的推理只能从原始的基础开始, 不能利用人们曾经讨论过的问题的结论.

写"解答"与写论文是有区别的. 写论文可以"站在别人的肩膀上", 从半空开始. 而写解答, 则只能站在平地上, 从"0"开始.

实际上, 你所描述的熟知结论, 对读者来说通通都自动"默认为"未知, 作为问题"解答", 重复前人的工作无疑是十分必要的.

此外, 解答中一般都要遍历题中的所有条件. 这些条件是推理的起点, 每个条件在整个解答中都至少要出现一次.

纪律 2: 断则"必然".

数学论断必须是必然结论. 我们知道, 所谓 A 推出 B , 意思是说, 如果有 A , 就一定有 B , 也就是说, B 成立是肯定的, 不是"有可能成立, 也有可能不成立"的.

如果 A 成立使某个结论 B 可能成立也可能不成立, 而后续推理中又需要用到结论 B , 则需以"是否出现结论B"为标准进行分类讨论.

比如, 抽屉原理的简单情形: 将 $m+1$ 个元素, 归入 m 个集合 (抽屉), 必定有一个抽屉 (至少)有 2 个元素. 这里"有一个抽屉 (至少)有 2 个元素"就是必然结果.

对此结论, 曾经有同学问: 会不会有一个抽屉有 3 个元素呢? 我们的回答是, 那当然是有可能的! 但它不是必然的, 所以不能作为数学推理的结果.

如果我们需要用到一个抽屉里有 3 个元素, 则需要分类讨论: (1) 如果存在一个抽屉有3个元素, 则 $\cdots$; (2) 如果每个抽屉至多有 2 个元素, 则 $\cdots$.

其实, 这种分类讨论的情形是存在的, 我们看一个例子.

例 1. *求证: 任何 5 个整数中必定有 3 个的和被 3 整除.*

证明 从目标看, 所谓"被 3 整除"就是模 3 余 0 , 自然想到构造模 3 的剩余类抽屉. 显然, 如果有一个抽屉中有 3 个数, 则结论成立. 但问题是, 未必一个抽屉有 3 个数. 于是, 我们需要分两种情况讨论:

(1) 如果存在一个抽屉有 3 个元素, 则这 3 个的和被 3 整除, 结论成立;

(2) 如果每个抽屉至多有 2 个元素, 则每个抽屉中至少一个数. 此时, 在每个抽屉中取出一个数, 这 3 个的和被 3 整除, 结论成立. □

纪律 3: 步步为"营".

这里的所谓"营", 就是理论依据, 也就是说每一步推理产生的结果都必须有直接的充足理由作保证. 这些理由包括: 定义, 定理, 原理, 公理, 公式, 法则等.

数学表达最容易导致不严密的地方就是直接写出相关结论而不说明理由. 更有甚者, 有些"解答"仅仅是若干中间结论的堆砌, 它充其量只能算作解题的一个思路或解题的提示, 算不上完整的解答.

此外, 推理应经得起"断章取义"的检验, 即割取任何完整的推理片段 (不能默认外加题目的条件), 其逻辑演绎仍然是正确的.

由于断言的理由不充分导致的解题失误是时有发生的, 我们举一个例子.

例 2. *设凸四边形 $ABCD$ 恰有一个内角 $\angle D$ 为钝角, 用一些直线将之分割成 n 个钝角三角形, 使凸四边形的四边上不含有非 A, B, C, D 的分割出的钝角三角形的顶点. 求证: n 满足的充分必要条件是 $n \geq 4$.*

分析与证明 此题是 1993 全国高中数学联赛中的最后一题, 但得分率相当低. 实际上, 本题并不难, 关键是参赛者没有掌握正确的思考方法, 特别是一些似乎显而易见的结论要严格证明却又不好表述.

先看必要性, 要证明 $n \geq 4$, 只需从反面否则 $n = 1, 2, 3$ 即可.

当 $n = 1$ 时, 四边形 $ABCD$ 显然不能按要求划分为 $n = 1$ 个钝角三角形, 因为四边形不是三角形. 所以 $n \neq 1$.

当 $n = 2$ 时, 四边形 $ABCD$ 被划分为 2 个钝角三角形, 必连对角线. 这是当年大多数选手的推理方式－－直接描述结论, 没有叙述理由.

当年官方的"评分标准"中明文规定: 凡直接写"连对角线"而没有叙述理由者扣 10 分. 笔者认为, 这一规定是非常合理的, 它强化了数学推理"步步为营"的必要性.

下面我们来看看为什么要连对角线.

先介绍官方的解答: 考察原四边形 $ABCD$ 的四条边在分割三角形中的归属, 原四边形的每条边都是其中一个分割三角形的边, 将 4 条边归入 2 个分割三角形, 由抽屉原理, 必有一个分割三角形含有原四边形的两条边, 这两条边只能是原四边形的两相邻边 (因为三角形任何两条边有公共点), 从而必连对角线. 但此时的分割不合乎要求, 所以 $n \neq 2$.

类似可以证明 $n \neq 3$. 而 $n \geq 4$ 时的分割方式是很简单的, 从略.

下面介绍我们对 $n \neq 2$ 的另一种解答: 由于四边形的内角和为 $360°$, 而两个三角形的内角和也为 $360°$, 于是分割中内角和不增加, 从而没有任何新增的顶点.

考察任意一条分割线, 它的两个端点只能是四边形的两个顶点, 又显然不是相邻顶点 (否则连线段为四边形的"边", 不是分割线), 从而该分割线是四边形的对角线 (下略). $\square$

2. 八项"注意".

(1) 慎用"不妨设"

数学中的"设"不是随意的, 它的一个必要的前提条件是所设的对象必须存在. 比如, 设 a 是合乎题目要求的最小正整数. 显然, 允许这样假设的前提是: 合乎题目要求的正整数存在. 如果这样的正整数不存在, 又怎能设出最小者?

此外, 具有对称性的字母方可序化排列: 不妨假设 $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$; 如果 n 个字母的地位轮换对称, 则可不妨假设 $a_1 = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 或 $a_1 = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$.

如果通过适当的代换可以将问题的其它情形转化当前的情形, 则需说明具体的转化过程. 比如:"不妨设 $\cdots$ (否则重新编号)","不妨设 $\cdots$ (否则作代换 $\times\times$)" 等.

(2) 少用"显然成立".

数学表达中, 要尽可能避免使用"显然成立"的字眼. 实际上,"显然成立"的命题只包括如下 3 种情形: 一是简单的恒成立的结论; 二是屈指可数的几个对象可轻而易举地一一验证; 三是大家公认的客观事实. 除此之外, 都必须讲明命题成立的具体理由.

值得指出的是, 即使是少数几个对象, 由于未经认真验证, 却用"显然成立"一笔带过, 从而造成对错误猜想完成"伪证"的现象是时有发生的.

(3) 不用"混搭"表述.

数学的基本特征之一是符号语言, 任何数学符号都有其特定的含义, 需要正确使用这些符号. 特别是有些符号, 必须与字母合起来才表示完整的意义, 并没有独立的含义. 它可以理解为"固定词组", 不可分割, 更不可与普通语言"混搭"描述. 诸如:"这样的直线是存在的"写成"这样的直线 $\exists$"之类是不合法的.

此外, 解答中要尽量避免用口头语言描述, 比如"要使结论成立, 只要 $a > 0$

就可以了", 应改为"要使结论成立, 只需 $a > 0$", 这才符合数学表达的行文方式.

(4) 避免滥用"同理可得".

将面临的问题分若干情形各个击破是常用的解题方式, 但最容易出现这样的失误: 仅处理其中一种情形, 而对其它情形一概用"同理可得"一笔带过. 殊不知,"同理可得"是有前提的: 如果将若干对象分别对应地更换为一些新对象, 而其它论述可以一字不改, 结论同样成立, 则可使用"同理可得", 略去其它情形的推理过程. 此外, 如果证明或计算过程的各个环节都相同, 只是具体对象和变形方式有所改变, 则可用"类似可得".

(5) 恰当使用逻辑连词.

数学表达中, 经常用到如下 3 类逻辑连词, 这些逻辑连词用法不尽相同, 要注意用词得当.

一是假言连接词, 诸如: 因为 $\cdots$, 所以 $\cdots$; 若 (如果) $\cdots$, 则 $\cdots$; 由 $\cdots$, 得 (知, 有) $\cdots$. 假言与转折的用词都是固定搭配的, 不能随意更换. 比如, "因为 $\cdots$, 则 $\cdots$", "由 $\cdots$, 所以 $\cdots$ 等推理表述就显得不伦不类, 读起来很别扭.

二是承接连接词, 诸如: 所以 $\cdots$; 因此 (之, 而) $\cdots$; 从而 $\cdots$; 于是 $\cdots$. 这些用词常常是用在某个新推出的结论之后, 其作用是承接上面的结论连同有关条件进行更深入的推理.

三是总结连接词, 诸如: 故 $\cdots$; 综上所述等. 这些词通常只用于总结最后的结论 (综合若干结果得到的结论), 基本上是用在文末.

(6) 灵活运用两类变形.

数学变形可分为断言变形与非断言变形.

所谓断言变形, 就是对含有描述两者关系的逻辑符号 (比如, 等号, 不等号, 相似, 全等, 同余, 关联 (如相邻, 共点, 共线等)) 的式子进行的变形, 其它形式的式子的变形称为非断言变形. 比如, 利用等式的基本性质进行的变形就是断言变形, 而利用分式的基本性质进行的变形就是非断言变形, 多项式的因式分解也是非断言变形.

变形如果是可逆的则称之为等价变形, 否则是非等价变形. 非等价变形往往需要对得到的结果进行限定, 筛选, 检验或补充.

比如, 解不等式 $\frac{1}{x} \leq 1$, 可以采用直接去分母的方式求解: 不等式两边同乘以 x^2, 得 $x \leq x^2$, 解之得 $x \leq 0$ 或 $x \geq 1$.

但这个解答是错误的, 因为上述变形是非等价变形, 原不等式隐含限定 $x \neq 0$, 需要在变形后补充这一限定.

正确的表述方式为: 不等式两边同乘以 x^2, 得 $x \le x^2$ $(x \neq 0)$, 解之得 $x < 0$ 或 $x \ge 1$.

一个数学问题, 有时只能使用其中一种方式变形, 有时两种变形方式都可, 比如证明不等式, 如果从不等式的一边出发. 采用放缩的方式变形到不等式的另一边, 则是非断言变形; 如果从一个已知的不等式出发, 借助不等式的基本性质, 将当前不等式逐步变形到目标不等式, 采用的则是断言变形.

(7) 准确使用串联与并联推理.

所谓串联推理是指单线条型的推理, 即对一个式子反复变形, 相继得出一些相关结论. 它的表述形式为: 因为 $\cdots$, 所以 $\cdots$, 所以 $\cdots$, 所以 $\cdots$.

用推出符号可以描述为 $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow \cdots$.

所谓并联推理, 使指多线条型的推理, 即综合若干个串联推理所得的结果, 得出新的相关结论. 它的表述形式为: 因为 $\cdots$, 所以 $\cdots$; 因为 $\cdots$, 所以 $\cdots$. 所以 $\cdots$. 或者为: 由 $\cdots$, 得 $\cdots$; 由 $\cdots$, 得 $\cdots$. 所以 $\cdots$.

用推出符号可以描述为

$$\left.\begin{array}{r} A \Rightarrow B \\ C \Rightarrow D \end{array}\right\} \Longrightarrow E$$

连续几个"所以"的叠合使用, 有时候却是隐式的并联推理. 此时, 第一个出现的"所以"是上式推出的结果, 接下来的所以则是综合上面若干个式子推出的结果.

在数学表达中, 要特别注意区分不同形式的"所以"表达的不同含义.

并联推理中较复杂的是利用假言命题进行的推理. 如果一个命题包含条件与结论两个部分, 我们称这样的命题为"假言命题". 利用假言命题进行的推理, 需先验证"假言"符合, 然后才能推出相应的结论. 比如, 函数单调性的应用, 就是典型的利用假言命题进行的推理.

假定 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增, 那么可进行如下推理: 因为 $0 < 1 < 2$ (验证假言符合), 所以 $f(1) < f(2)$ (推出结论).

(8) 正确选择分列表述与合并表述.

在分类讨论中, 由于所选分类对象不同, 导致解题结论的表述有所区别.

一般地说, 如果对主元之外的其它字母分类讨论, 其结果应根据所讨论字母的不同取值分类表述.

比如, 解关于 x 的不等式 $ax < 1$, 最后的结果应分情况表述为: 当 $a < 0$ 时, 不等式的解为 $x > \frac{1}{a}$; 当 $a = 0$ 时, 不等式的解为全体实数: 当 $a > 0$ 时, 不等式

的解为 $x < \frac{1}{a}$.

如果对主元字母分类讨论，其结果应将字母的不同取值得到的不同结果合并才得到完整的解答。

比如, 解不等式 $\frac{1}{x} \le 1$, 可以采用分类讨论的方式求解: 当 $x > 0$ 时, 不等式去分母, 变为 $x \ge 1$; 当 $x < 0$ 时, 不等式恒成立. 所以原不等式的解集为 $\{x|x < 0 或 x \ge 1\}$(合并表述).

总体来说, “三大纪律”是数学表达的基本要求,违反其中任何一条, 解答都是不合格的, 通常需要进行较大的修改, 甚至整段全盘否定.

“八项注意”是数学表达的更高层次的要求, 违反其中一条, 解答就会出现漏洞, 需要适当修补.

勿容讳言, 以上仅是笔者一家之见, 谬误难免, 欢迎读者不吝赐教.