对两道数论赛题相似性的探究

张晚治

(石家庄二中, 050004)

本文给出两道赛题的构造过程, 并指出它们的相似性.

笔者在做文 [1] 中的题目时，看到如下题目:

题 1 (第 45 届 IMO 预选题) 设 k 为大于 1 的固定整数, $t=4k^2-5$, 求证: 存在 $a,b\in\mathbb{N}^*$, 使得如下定义的数列 $x_0=a$, $x_1=b$, $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n$ $(n=0,1,\cdots)$, 其所有项均与 t 互素.

分析 此题原答案是直接给一个神奇的构造 “$a=1$, $b=2k^2+k-2$”, 然后论证同余性质, 至于为什么要取 $a=1$, $b=2k^2+k-2$, 原解答里并未提及.

笔者做如下分析:

因为此数列为线性递推数列, 所以必为模周期数列, 希望构造出一个 $\{x_n\}$, 使每项均与一个数的幂同余. 所以取 $a=1$, 令 $b=mk^2+nk+l$ (b 为关于 k 的二次式) 次同余, 再使此数与 m 互质, 即可得证.

写出 $\{x_n\}$ 前几项 $1,b,1+b,1+2b,3b+2$, 即找到 b, 满足

$$\begin{cases} 4b\equiv b^2 \pmod{4k^2-5} \\ 2b+1\equiv b^3 \pmod{4k^2-5} \\ 3b+2\equiv b^4 \pmod{4k^2-5} \end{cases},$$

$$x_n\equiv b^0,b^1,b^2,b^3,b^4 \pmod{4k^2-5}.$$

注意到后两式可由第 1 式推出, 只考虑第 1 式, 将 b 代入

$$1+mk^2+nk+l\equiv 4lk+n^2k^2+2lnk+l^2+5k^2+5nk,$$

为消去四次, 三次项, 不妨设 $m=2$ (使之不出现分数), 利用

$$4k^2\equiv 5 \pmod{4k^2-5},$$

收稿日期: **2019-04-05.**

所以

$$(4l+n^2+5-2)k^2+(2ln+4n)k+l^2-l-1\equiv 0 \pmod{4k^2-5}.$$

为使上式成立, 令

$$\begin{cases} n^2+3=4 \\ 2ln+4n=0 \end{cases},$$

可以推出

$$\begin{cases} n=1,-1 \\ l=-2,-2 \end{cases}.$$

经检验 $l^2+4l-1=-5$ 成立! 所以不妨设 $b=2k^2+k-2$.

至此我们得到了原题构造. 因为

$$(2k^2+k-2,4k^2-5)=(-2k-1,4k^2-5)=(2k+1,4)=1,$$

所以回到原题, 归纳证明 $x_n\equiv b^n \pmod t$.

$n=1,2$ 显然, 设结论对 $\le n$ 时成立, 则

$$\begin{aligned} x_{n+1}&=x_{n-1}+x_n \\ &\equiv b^n+b^{n-1}=b^{n-1}(1+b) \\ &\equiv b^{n-1}\cdot b^2=b^{n+1} \pmod{4k^2-5}. \end{aligned}$$

由数学归纳法知, $x_n\equiv b^n \pmod t$ 成立.

又 $(b,t)=1$, 所以 $(b^n,t)=1$, 所以 $\{x_n\}$ 中每一项均与 t 互素. □

再看一道类似的题目,这是笔者在做文 [2] 中看到的.

题 2 (2017 年印度国家队选拔考试) 数列 $\{a_n\}, a_0=m, a_1=n$, 对任意 $k\ge 1$, 均有 $a_{k+1}=4a_k-5a_{k-1}$, 记 p 为大于 5 且模 4 余 1 的素数, 求证: 存在 $m,n\in\mathbb{N}^*$, 满足 p 不整除 a_k, 对任意 $k\ge 0$ 恒成立.

分析 此题同上题一样, 仍需找到一个使得 $a_k\equiv n_k \pmod p$.

证明 同上题, 令 $m=1$, 因为 $p\equiv 1 \pmod 4$, 所以 p 整除 t^2+1 (二次剩余). 同上题, 希望找 n 满足

$$4n-5\equiv n^2 \pmod{t^2+1}.$$

令

$$n=at^2+bt+c,$$

$$a^2t^4+2abt^3+(2ac+b^2)t^2+2bct+c^2\equiv 4(at^2+bt+c)-5 \pmod{t^2+1}.$$

左式$\equiv a^2t^2+2abt+(2ac+b^2)t^2+2bct+c^2 \pmod{t^2+1}$,

右式$\equiv 4at^2+4bt+4c-5 \pmod{t^2+1}$,

所以

$$(a^2+2ac+b^2-4a)t^2+(2ab+2bc-4b)t+c^2-4c+5\equiv 0.$$

为方便化简

$$\begin{cases} c^2-4c+5=1, & (1)\\ 2ab+2bc-4b=0, & (2)\\ a^2+2ac+b^2-4a=1. & (3)\end{cases}$$

由 (1) 式 $c=2$, 由 (2) 式不妨设 $a=0$, 在此式中 b 任意, 由 (3) 式 $b=\pm1$, 所以取 $b=1$, $n=t+2$.

下同上题, 证明对任意 $k\geq 0$, 有 $a_k\equiv n^k \pmod p$.

$k=0,1$, 显然. 设对任意 $s=0,1\cdots k$, $a_s\equiv n^s \pmod p$. 则 $s=k+1$ 时,

$$a_{k+1}=4a_k-5a_k-1\equiv 4n^k-5n^{k-1}\equiv n^{k-1}(4n-5)\equiv n^{k+1} \pmod p.$$

又若

$$p|n,\ p|t+2,\ t^2+1\equiv(-2)^2+1\equiv 5 \pmod p.$$

与 $p=5$ 矛盾, 所以 p 不整除 n. 故 p 不整除 a_k. □

此题应是印度人做完预选题后在此基础上改编而成的, 换汤不换药.

参考文献

[1] 中等数学编辑部编. 国内外数学奥林匹克试题精选 (2002–2012): 数论部分 [M], 浙江大学出版社, 2015.10.

[2] 中等数学编辑部编. 国内外数学奥林匹克试题及精解 (2016–2017) [M], 哈尔滨工业大学出版社, 2018.8.