数学新星问题征解第一期解答

2014.4

第一题: 设 a, b, n 是正整数, $a, b \le n$. 证明:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k^a C_k^b \le \frac{1}{a+b+1} C_n^a C_n^b.$$

注: 当 $m < k$ 时, 规定 $C_m^k = 0$.

证明: 注意到 $n \ge k \ge a$ 时, 有

$$\begin{aligned}\frac{C_k^a}{C_n^a} &= \frac{k!}{(k-a)!} \cdot \frac{(n-a)!}{n!} \\ &= \frac{k(k-1)\cdots(k-a+1)}{n(n-1)\cdots(n-a+1)} \le (\frac{k}{n})^a\end{aligned}$$

即 $C_k^a \le \frac{1}{n^a} C_n^a k^a$. (1)

同理可得当 $n \ge k \ge b$ 时有

$$C_k^b \le \frac{1}{n^b} C_n^b \cdot k^b. \tag{2}$$

由 (1) 和 (2) 可得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k^a C_k^b \le \frac{1}{n^{a+b+1}} C_n^a C_n^b \cdot \sum_{k=0}^{n-1} k^{a+b}. \tag{3}$$

又注意到

$$\begin{aligned}n^{a+b+1} &= \sum_{k=0}^{n-1}((k+1)^{a+b+1} - k^{a+b+1}) \\ &\ge \sum_{k=0}^{n-1}(a+b+1)k^{a+b},\end{aligned}$$

即 $\sum\limits_{k=0}^{n-1} k^{a+b} \le \frac{n^{a+b+1}}{a+b+1}$. (4)

由 (3) 和 (4) 便得所证不等式. □

评注: 此问题是一个简单的 Grüss 型不等式. 用上面方法还可证明如下的 Grüss 不等式:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} C_k^i C_k^j C_k^m - \frac{1}{n^3} C_{n+1}^{i+1} C_{n+1}^{j+1} C_{n+1}^{m+1} \le \frac{1}{8} C_n^i C_n^j C_n^m,$$

其中 $n\ge 1, 1\le i,j,m\le n, i,j,m\in N^*$.

用上面的方法还可证明如下的 Grüss-Landau 不等式: 设 $a_k\ge 0$, $k=0,1,\cdots,n$, $A_n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a_k$, 则

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}A_k^2-\frac{1}{n^2}(\sum_{k=0}^{n}A_k)^2\le\frac{4}{45}(A_n-A_0)^2.$$

这被选作 2013 年国家集训队测试题, 公认是当年难度很高的一道试题.

第一题也可用归纳法证明, 篇幅甚至更短.

第二题: 设 G 是一个简单图, $\overline{G}$ 是 G 的补图. 已知 G 和 $\overline{G}$ 都是联通的, 求 G 和 $\overline{G}$ 的直径之和的最大值.
注: 图 G 的直径是 G 中任何两点距离的最大者.

解 1 (根据郑州外国语学校朱书聪同学的解答整理而成):

用 G' 表示 G 的补图. 设 $|G|=n$, 则 $n\ge 4$, 否则, G,G' 中必有一个不连通, 矛盾. 设 G 和 G' 的直径分别为 n 和 r, 先证明 $k+r\le\max\{6,n+1\}$.

(1) 若 n,r 中有一个不小于 4, 不妨设 $k\ge 4$, 并设 A,B 是 G 的直径的两个端点. 对 G 中的任意顶点 G, 定义 $f(G)$ 为 A,G 之间在 G 中的距离, 特别地, $f(A)=0$.

易知, 对 G 中的任意两个顶点 P,Q, 若 P,Q 在 G 中相连, 则 $|f(P)-f(Q)|\le 1$. 事实上, 不妨设 $f(P)\le f(Q)$, 则由于 P 与 A 在 G 中的距离为 $f(P)$, 而 P,Q 在 G 中相连, 故 $f(Q)\le f(P)+1$, 于是 $|f(P)-f(Q)|\le 1$.

由此可见，对 G 中的任意两个顶点 P,Q, 若 $|f(P)-f(Q)|\ge 2$, 则 P,Q 在 G 中不相连, 从而在 G' 中相连.

下面证明: $r\le 2$.

事实上, 我们证明, 对于 G' 中的任意两个顶点 P,Q, P,Q 在 G' 中距离不大于 2.

(i) 若 $|f(P)-f(Q)|\ge 2$, 则 P,Q 在 G 中不相连, 从而 P,Q 在 G' 中距离为 1, 结论成立.

(ii) 若 $|f(P)-f(Q)|=0$, 则 $f(P)=f(Q)$. 显然 $f(P)=f(Q)\ne 0$, 否则 $P=Q=A$, 矛盾. 若 $f(P)=f(Q)=1$, 则在 G 中 P,A 相连, Q,A 相连, 而 $f(B)\ge 4$, 于是在 G 中 P,B 不连, Q,B 不连, 所以在 G' 中有一条路:

$P \to B \to Q$, 结论成立; 若 $f(P) = f(Q) \geq 2$, 则在 G 中 P, A 不相连, Q, A 不相连, 从而在 G' 中有一条路: $P \to A \to Q$, 结论成立.

(iii) 若 $|f(P) - f(Q)| = 1$, 不妨设 $f(P) - f(Q) = 1$, 若 $f(P) = 1$, 则 $f(Q) = 0$, 从而 P, A 相连, $Q = A$, 但 $f(B) \geq 4$, 所以在 G 中 P, B 不连, Q, B 不连, 所以在 G' 中有一条路: $P \to B \to Q$, 结论成立; 若 $f(P) = f(Q) \geq 2$, 则在 G 中 P, A 不相连, Q, A 不相连, 从而在 G' 中有一条路: $P \to A \to Q$, 结论成立.

综上便证明了 $r \leq 2$.

因为 G 中连接 A, B 的路有 $k+1$ 个顶点 (含 A, B), 且这些顶点互异, 否则不是最短路, 于是 $k+1 \leq n$, 所以 $k + r \leq k + 2 \leq n + 1$.

(2) 若 k, r 都不大于 3, 则 $k + r \leq 6$.

由 (1) 和 (2) 可得 $k + r \leq \max\{6, n+1\}$.

另一方面, 当 G 是长为 $n-1$ 的链时, $k + r = \max\{6, n+1\}$.

事实上, 若 $n = 4$, 则 G 与 G' 都是长为 3 的链, $k + r = 3 + 3 = \max\{6, n+1\}$.

若 $n \geq 5$, 则 $k = n - 1$, 对任意两点 P, Q, 如果 P, Q 在 G 中不相连, 则 P, Q 在 G' 中的距离为 1. 如果 P, Q 在 G 中相连, 则 P, Q 在 G' 中的距离不小于 2. 因为 P, Q 在 G' 中的度都是 $n-3$, 其度的和为 $2n-6$, 于是, 由抽屉原理, 其余 $n-2$ 个点中, 至少有一个点向 P, Q 之间连边数 $\geq \frac{2n-6}{n-2} = \frac{(n-1)+(n-5)}{n-2} \geq \frac{n-1}{n-2} > 1$, 所以至少有一个点与 P, Q 都有边相连, 所以 P, Q 在 G' 中的距离为 2. 所以, $k + r = (n-1) + 2 = n + 1 = \max\{6, n+1\}$.

综上所述, 所求 $k + r$ 的最小值为 $\max\{6, n+1\}$. □

解 2 (冯跃峰老师提供):

用 G' 表示 G 的补图, 设 $|G| = n$, 则 $n \geq 4$. 否则, G, G' 中必有一个不连通, 矛盾.

用 $d(G), d(G')$ 分别表示 G 和 G' 的直径, 用 $d(A, B), d'(A, B)$ 分别表示两点 A, B 在 G 和 G' 中的距离, 我们将 G 和 G' 作在一个图中, 其中 G 的边用实边表示, G' 的边用虚边表示.

先证明下面的结论: 若 $d(G) \geq 3$, 则 $d(G') \leq 3$.

实际上, 设 A, B 是 G 的直径的两个端点, 则 $d(A, B) \geq 3$, 于是 AB 为虚边, 且对 A, B 外的任意一点 P, PA, PB 不能都是实边, 否则 $d(A, B) = 2$, 矛盾. 所以 PA, PB 中至少有一条是虚边.

考虑任意两个点 M,N, 如果 $\{M,N\}=\{A,B\}$, 则 $d'(M,N)=1$. 如果 $M\in\{A,B\},N\notin\{A,B\}$, 则因 NA,NB 中至少有一条是虚边, 且 AB 是虚边, 所以 $d'(M,N)\le 2$. 如果 $N\in\{A,B\},M\notin\{A,B\}$, 则同理有 $d'(M,N)\le 2$. 如果 $M\notin\{A,B\},N\notin\{A,B\}$, 则因 MA,MB 中至少有一条是虚边, NA,NB 中至少有一条是虚边, 且 AB 是虚边, 所以 $d'(M,N)\le 3$. 于是, 不论哪种情况, 都有 $d'(M,N)\le 3$, 所以 $d(G')\le 3$.

进一步可知, 若 $d(G)\ge 4$, 则 $d(G')\le 2$. 否则, $d(G')\ge 3$, 在上述结论中将 G 换成 G', 有 $d(G)\le 3$, 与 $d(G)\ge 4$ 矛盾.

下面证明: $d(G)+d(G')\le \max\{6,n+1\}$.

(1) 若 $d(G)\le 3$, $d(G')\le 3$, 则 $d(G)+d(G')\le 6\le \max\{6,n+1\}$.

(2) 若 $d(G)\ge 4$, 则由上面所证, 有 $d(G')\le 2$. 又 G 中连接 A,B 的路有 $d(G)+1$ 个顶点 (含 A,B), 且这些顶点互异, 否则不是最短路, 于是 $d(G)+1\le n$. 所以, $d(G)+d(G')\le (n-1)+2=n+1\le \max\{6,n+1\}$.

另一方面, 当 G 是长为 $n-1$ 的链时, $d(G)+d(G')=\max\{6,n+1\}$. 实际上, 若 $n=4$, 则 G 与 G' 都是长为 3 的链, $d(G)+d(G')=3+3=6=\max\{6,n+1\}$.

若 $n\ge 5$, 则 $k=n-1$, 对任意两点 P,Q, 如果 P,Q 在 G 中不相连, 则 P,Q 在 G' 中的距离为 1. 如果 P,Q 在 G 中相连, 则 P,Q 在 G' 中的距离不小于 2. 因为 P,Q 在 G' 中的度都是 $n-3$, 其度的和为 $2n-6$, 于是, 由抽屉原理, 其余 $n-2$ 个点中, 至少有一个点向 P,Q 之间连边数 $\ge \frac{2n-6}{n-2}=\frac{(n-1)+(n-5)}{n-2}\ge \frac{n-1}{n-2}>1$, 所以至少有一个点与 P,Q 都有边相连, 所以 P,Q 在 G' 中的距离为 2. 所以, $d(G)+d(G')=(n-1)+2=n+1=\max\{6,n+1\}$.

综上所述, 所求 $d(G)+d(G')$ 的最小值为 $\max\{6,n+1\}$. □

评注: 在图论中, 有一类广受关注的 Nordhans-Gaddum Problem, 这一类问题是对图论函数 $f(G)$ 研究

$$f(G)+f(\overline{G})$$

和

$$f(G)\cdot f(\overline{G})$$

的上界和下界. 第二题是著名图论专家 J. A. Bondy 1970 年研究 $f(G)$ 为直径时的结果. 武钢三中的黄一山同学给出了与 Bondy 相似的证法, 都是通过棱数的估计来达到目标.

第三题: 设 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是平面上的 n 个单位向量, n 是奇数, 证明: 存在 $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}, i = 1, 2, \cdots, n$ 使得

$$|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i| \leq 1.$$

解 1 (根据深圳第三中学吴东晓的解法整理而成):

不妨设 $v_1 = (1, 0)$, 否则将所有 v_i $(1 \leq i \leq n)$ 同时旋转一个角, 而 $|v_i|$ 和 $|\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i v_i|$ 均不变. 同时, 不妨设 $v_2, v_3, \cdots, v_n$ 均在上半单位圆上, 否则, 若有某个 v_j 在下半单位圆上, 则用 $-v_j$ 代替 v_j, $-\varepsilon_j$ 代替 ε_j 便可. 进一步, 我们可设 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 按逆时针排序在上半单位圆上.

注意到 n 是奇数, 要证明题中结论成立, 我们仅须证明:

$$|v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \cdots + v_{n-2} - v_{n-1} + v_n| \leq 1. \tag{1}$$

为此, 令 $n = 2k + 1$ $(k \in \mathbf{N}^*), \alpha_1 = v_3 - v_2, \alpha_2 = v_5 - v_4, \cdots, \alpha_k = v_n - v_{n-1}$, 这时要证 (1), 转化为证

$$|v_1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k| \leq 1. \tag{2}$$

记 $\alpha = v_1 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$, 设 l 是过原点且方向平行于 α 的直线, 设点 $A'(1, 0)$ 和点 $C'(-1, 0)$ 在 l 上的投影分别为 A, C, l 与上半单位圆交于 B. 不妨设所有向量 α_i 均不与 l 相交于非端点, 否则, 记 $\alpha_i = \overrightarrow{PQ}$, 将 α_i 分为 $\overrightarrow{PB}$ 和 $\overrightarrow{BQ}$ 便可.

设弧 $\overset{\frown}{A'B}$ 上的向量为 $\alpha_1, \cdots, \alpha_j$, 弧 $\overset{\frown}{BC'}$ 上的向量为 $\alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_k$. 则 $\alpha_1, \cdots, \alpha_j$ 在 l 上的投影 $\beta_1, \cdots, \beta_j$ 均落在线段 AB 上, 且两两无公共部分, 方向均与 $\overrightarrow{AB}$ 同向. 记 $\gamma_1 = \beta_1 + \cdots + \beta_j$, 则

$$|\gamma_1| \leq |AB|. \tag{3}$$

同样, $\alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_k$ 在 l 上的投影 $\beta_{j+1}, \cdots, \beta_k$ 均落在线段 BC 上, 两两无公共部分, 方向均与 $\overrightarrow{BC}$ 相同. 记 $\gamma_2 = \beta_{j+1} + \cdots + \beta_k$, 则

$$|\gamma_2| \leq |BC|. \tag{4}$$

又显然, v_1 在 l 上的投影为 $\overrightarrow{OA}$, 且 $|OA| = |OC|$. 故由向量的分解法则可知

$$\alpha = \gamma_1 + \overrightarrow{OA} + \gamma_2.$$

因此

$$|\alpha| = ||\gamma_1| + |OA| - |\gamma_2|| = ||\gamma_1| + |OC| - |\gamma_2||. \tag{5}$$

又由 (3) 和 (4) 可得

$$|\gamma_1| + |OC| - |\gamma_2| \geq |OC| - |BC| = -|OB| = -1, \tag{6}$$

$$|\gamma_1| + |OC| - |\gamma_2| \leq |AB| + |OA| = |OB| = 1. \tag{7}$$

综合 (5) (6) 和 (7) 式便得 $|\alpha| \leq 1$, 这就是要证的 (2) 式. □

解 2 (根据湖北武钢三中陈泽坤、黄一山的解法整理而成):

设 $n = 2k+1$ $(k \in \mathbf{N}^*)$, $v_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \cdots, 2k+1$. 不妨设 $y_i \geq 0$, 否则用 $-v_i$ 代替 v_i, $-\varepsilon_i$ 代替 ε_i 便可. 并且不妨设 $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_{2k+1}$. 下面用数学归纳法证明

$$|\sum_{i=1}^{2k+1}(-1)^{i-1}v_i| \leq 1.$$

当 $k = 1$ 时结论显然成立.

假设结论对 k 成立, 现考虑 $k+1$ 的情况.

首先我们叙述一个事实:

设 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1, 1]$, 则 $f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的凹函数, 即 $f''(x) \leq 0$, 故对任何的 $0 \leq d \leq 1$, $g_d(x) = f(x+d) - f(x)$ 是 $x \in [-1, 1-d]$ 上的单调不增函数. (*)

记

$$X = \sum_{i=1}^{2k+1}(-1)^{i-1}x_i,\ Y = \sum_{i=1}^{2k+1}(-1)^{i-1}y_i.$$

下分两种情况讨论:

(i) 当 $Y \geq 0$ 时.

令

$$v_1' = (x_3 + x_1 - x_2, f(x_3 + x_1 - x_2)),$$

$$v_2' = (x_3, f(x_3)),$$

$$v_i' = v_i, i = 3, 4, \cdots, 2k+1.$$

并记

$$v_i' = (x_i', y_i'), i = 1, 2, \cdots, 2k+1,$$

$$X' = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} x'_i,\ Y' = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} y'_i.$$

则显然有

$$X' = X. \tag{8}$$

又注意到 $x_1 \le x_2 \le x_3$, 并由事实 (*) 可得

$$\begin{aligned} Y' - Y &= y'_1 - y'_2 - y_1 + y_2 \\ &= f(x_3 + x_1 - x_2) - f(x_3) - f(x_1) + f(x_2) \\ &= g_{x_2 - x_1}(x_1) - g_{x_2 - x_1}(x_3 + x_1 - x_2) \\ &\ge 0. \end{aligned}$$

即

$$Y' \ge Y. \tag{9}$$

故, 注意到 $v'_2 = v'_3$, 并由 (8) 和 (9) 及归纳假设可得

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} v_i| &= \sqrt{X^2 + Y^2} \le \sqrt{X'^2 + Y'^2} \\ &= |\sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} v'_i| = |v'_1 + \sum_{i=4}^{2k+1} (-1)^{i-1} v_i| \le 1. \end{aligned}$$

(ii) 当 $Y \le 0$ 时.

令

$$v'_1 = (-1, 0),$$

$$v'_2 = (-1 - x_1 + x_2, f(-1 - x_1 + x_2)),$$

$$v'_i = v_i, i = 3, 4, \cdots, 2k+1,$$

并记

$$v'_i = (x'_i, y'_i), i = 1, 2, \cdots, 2k+1,$$

$$X' = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} x'_i,\ Y' = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} y'_i.$$

再令

$$v''_{2k+1} = (1, 0),$$

$$v''_{2k} = (1 - x'_{2k+1} + x'_{2k}, f(1 - x'_{2k+1} + x'_{2k})),$$

$$v_i'' = v_i', i = 1, 2, \cdots, 2k-1.$$

并记

$$v_i'' = (x_i'', y_i''), i = 1, 2, \cdots, 2k+1,$$

$$X'' = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} x_i'',\ Y'' = \sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} y_i''.$$

则显然有

$$X'' = X' = X. \tag{10}$$

又注意到 $x_1 \geq -1, x'_{2k+1} \leq 1$, 分别应用事实 (*) 可得

$$\begin{aligned} Y' - Y &= y_1' - y_2' - y_1 + y_2 \\ &= f(-1) - f(-1 - x_1 + x_2) - f(x_1) + f(x_2) \\ &= g_{x_2 - x_1}(x_1) - g_{x_2 - x_1}(-1) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y'' - Y' &= y''_{2k+1} - y''_{2k} - y'_{2k+1} + y'_{2k} \\ &= f(1) - f(1 - x'_{2k+1} + x'_{2k}) - f(x'_{2k+1}) + f(x'_{2k}) \\ &= g_{x'_{2k+1} - x'_{2k}}(1 - x'_{2k+1} + x'_{2k}) - g_{x'_{2k+1} - x'_{2k}}(x'_{2k}) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

即有

$$Y'' \leq Y' \leq Y \leq 0. \tag{11}$$

故, 注意到 $v_1'' + v''_{2k+1} = 0$, 并由 (10) 和 (11) 及归纳假设可得

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} v_i| &= \sqrt{X^2 + Y^2} \leq \sqrt{X'^2 + Y'^2} \leq \sqrt{X''^2 + Y''^2} \\ &= |\sum_{i=1}^{2k+1} (-1)^{i-1} v_i''| = |\sum_{i=2}^{2k} (-1)^{i-1} v_i''| \leq 1. \end{aligned}$$

综合 (i) 和 (ii), 便知 $n = k+1$ 时结论也成立.

故由数学归纳可知结论成立. $\square$

解 3 (Barany 等):

记 $P = \text{conv}\{\pm v_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$, 则 P 是一个内接于单位圆的中心对称凸多边形. 因为用 $-v_i$ 代替 v_i 不改变问题的条件与结论, 因此不妨设 P 的顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n, -v_1, -v_2, \cdots, -v_n$ 按逆时针排列在单位圆上.

因 n 是奇数, 我们仅须证明

$$|v_1 - v_2 + v_3 - \cdots - v_{n-1} + v_n| \leq 1. \tag{12}$$

为此, 令 $u = 2(v_1 - v_2 + v_3 - \cdots - v_{n-1} + v_n)$. 并令 $a_i = v_{i+1} - v_i, i = 1, 2, \cdots, n-1, a_n = -v_1 - v_n, w = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + a_n$. 则由 a_i $(1 \leq i \leq n)$ 的定义有

$$w = -2(v_1 - v_2 + v_3 - \cdots - v_{n-1} + v_n) = -u.$$

故 $|u| = |w|$. 这样要证 (12) 式成立, 我们仅须证明

$$|w| \leq 2. \tag{13}$$

设 l 是过原点且方向平行于 w 的一条直线, 它与 P 的边界交于点 $b, -b$. 由对称性, 不妨设 b 落在 P 的边 $[v_1, -v_n]$ 上. 故 w 恰是边向量 $a_1, -a_2, a_3, \cdots, a_n$ 沿平行于 $[v_1, -v_n]$ 的方向在 l 上的投影之和. 这些投影是不重叠的 (除了端点外), 并且恰好覆盖 l 上的线段 $[b, -b]$, 故 $|w| \leq 2$, 即 (13) 式得证. $\square$

评注: 第三题似乎是一个经典问题. $n = 3$ 的情况是 2007 年罗马尼亚的试题. 最近 I. Barany 等人在*Discrete Math. 13(2013)* 上重新研究了这个问题. 第三题是他们文章中的第一个结果.

值得注意, n 是奇数的条件是必须的, 不可去掉. 他们在这一文章中还证明了如下有趣的结论: 设 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是平面的单位向量, 则存在 $\varepsilon_i \in \{-1, 1\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 使得

$$|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i v_i| \leq 2,$$

对每个奇数 $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 成立.

第四题: 对给定的正整数 $n \geq 8$, 证明: 存在自然数的集合 A 使得 $|A| = n$ 且

$$|A - A| < |A + A|.$$

其中 $A - A = \{a - b | a \in A, b \in A\}$, $A + A = \{a + b | a \in A, b \in A\}$.

证明: 首先引进一些记号和定义: 首先定义 $a - A = \{a\} - A$. 如果 $a^* \in A$ 且使得 $A = a^* - A$, 则称 A 关于 a^* 对称. 如果 A 关于 a^* 对称, 则

$$|A + A| = |A + (a^* - A)| = |a^* + (A - A)| = |A - A|.$$

下面构造 $n = 8$ 时的例子: 记

$$A_1 = \{0, 2, 3, 4, 7, 11, 12, 14\}.$$

再说明 A_1 满足要求. 事实上, 记 $A^* = A_1 \setminus \{4\}$, 注意到 A^* 是关于 14 对称的. 所以 $|A^* + A^*| = |A^* - A^*| = |A_1 - A_1|$. 又 $8 \in (A_1 + A_1) \setminus (A^* + A^*)$, $A^* + A^* \subseteq A_1 + A_1$, 故 $|A_1 + A_1| > |A_1 - A_1|$, A_1 满足要求.

怎样将 $n = 8$ 的结果推广到一般的 n 呢? 注意 A_1 可表示为

$$\begin{aligned} A_1 &= \{0, 2, 3, 7, 11, 12, 14\} \cup \{4\} \\ &= \{0, 2\} \cup \{3, 7, 11\} \cup \{14 - \{0, 2\}\} \cup \{4\}. \end{aligned}$$

这启发我们构造一般 $n (n \geq 8)$ 的例子.

记 $A^* = \{0, 2\} \cup \{3, 7, 11, \cdots, 4k - 1\} \cup \{4k, 4k + 2\}$, 其中 $k > 2$, 则 $A = A^* \cup \{4\}$ 就是满足 $|A - A| < |A + A|$ 的 n 元集.

下面证明 A 确实满足要求. 注意到 A^* 关于 $4k + 2$ 对称, 因此

$$|A^* + A^*| = |A^* - A^*|.$$

又 $A^* + A^* \subseteq A + A$, 且 $8 \in (A + A) \setminus (A^* - A^*)$. 故, $|A + A| > |A^* + A^*|$.

这样要证结论成立, 仅须证明

$$|A - A| = |A^* - A^*|.$$

这只须证明: $A^* - \{4\} \subseteq A^* - A^*$ 便可. 这个论断可有下面几个简单

事实推出:

$$\begin{aligned}1 &= 3-2 \in A^*-A^*\\ 4 &= 7-3 \in A^*-A^*\\ 4k-4 &= (4k-1)-3 \in A^*-A^*\\ 4k-2 &= 4k-2 \in A^*-A^*.\end{aligned}$$

证毕. □

评注: 在组合数论中, 满足 $|A+A|>|A-A|$ 的集合 A 叫做和比差多的集合 (more sums than differences), 简称 MSTD 集. 关于 MSTD 集的研究文献不少. 第四题是数学家 Nathanson 于 2007 年发表在*J. Combin. Number Theory* 杂志上一论文的结果. 这可能是整数 MSTD 集的第一个 explicit 构造.

值得指出的是, Hegary 证明了不存在 $n<8$ 的整数 MSTD 集. 我们认为, 第四题是一个很难的问题, 郑州外国语学校的朱书聪同学、大连二十四中的余佳弘同学能给出此问题的正确构造, 值得赞赏.

最后, 我们感谢冯跃峰老师帮助审查了第二题的全部解答, 修改整理了朱书聪同学的解答. 感谢岑爱国老师、李雨红老师和席东盟博士参与了第三题讨论, 指出并订正了原来的错误.