2018 年第 84 届圣彼得堡数学竞赛组合题解析

羊明亮[1] 吴尉迟[2]

(1. 浙江省乐清市知临中学, 325600; 2. 上海大学, 200444)

在国家和地区的数学竞赛中, 圣彼得堡的数学竞赛可能是公认难度最大的, 特别是其中的组合题, 题面新颖. 我们选取了 2018 年的圣彼得堡数学竞赛八道组合题, 其中第 1、2 题是九年级竞赛题, 第 3、4、5、6 题是十年级竞赛题, 第 7、8 题是十一年级竞赛题.

在所选的八个题中, 第 1、3、4、7、8 题是联赛二试难度的题; 第 2、5、6 题是冬令营中等难度的题. 总体而言, 今年的组合题难度比去年简单些, 去年的题目及解答可以参见数学新星网教师专栏的《2017 年第 83 届圣彼得堡数学竞赛组合题解析》一文.

第 1 题 一个圆项链有 $n>3$ 个珠子, 每颗珠子染为红色或蓝色. 如果一颗珠子相邻两侧的珠子同色, 则它可被重新染为另一种颜色 (从红色到蓝色或从蓝色到红色). 求所有满足以下性质的 n: 若 n 个珠子无论开始如何染色, 总可以重新染色, 使所有的珠子均是同一颜色.

解 1 (天津实验中学 解尧平) 所求的 n 为所有大于 3 的奇数.

先证明 n 为偶数时, 不满足条件.

当 $n \equiv 0 \pmod 4$, 取珠子的染色方式为 “红红蓝蓝红红$\cdots$蓝蓝” 时, 则每个珠子都无法重新染色. 故此时不能重新染色, 使所有珠子均为同一颜色.

当 $n \equiv 2 \pmod 4$, 取珠子的染色方式为 “红红红红蓝蓝红红$\cdots$蓝蓝” 时, 只将其中两个红色能重新染为蓝色, 注意到珠子为圆排列, 故重新染色后的染色方式为 “蓝蓝蓝蓝红红蓝蓝$\cdots$红红”, 如此往复, 故不能重新染色使得所有珠子同色.

下证 n 为奇数时, 满足条件.

反证法. 假设存在一种初始的染色方式, 使得无法通过重新染色使所有珠子

收稿日期: 2018-12-28.

同色. 设 n_0 是最大的正整数, 满足: 可对初始染色方式重新染色, 使得存在 n_0 个连续珠子同色.

不妨设这 n_0 个珠子均为红色. 下面对 n_0 分奇偶讨论.

① n_0 为奇数. 则存在 n_0+2 个连续的珠子, 其颜色为: 蓝$\underbrace{\text{红红}\cdots\text{红}}_{n_0}$蓝. 我们可以依次对连续 n_0 个红色珠子中的第 $2,1,4,3,\cdots,n_0$ 个珠子进行重新染色. 这样便可以得到连续 n_0+2 个同色的珠子. 这与 n_0 的最大值矛盾.

② n_0 为偶数. 则存在 n_0+2 个连续的珠子, 其颜色为 蓝$\underbrace{\text{红红}\cdots\text{红}}_{n_0}$蓝. 由 n_0 的最大性知, 存在 n_0+4 个连续的珠子, 其颜色为: 蓝蓝$\underbrace{\text{红红}\cdots\text{红}}_{n_0}$蓝蓝. 我们可以依次对连续 n_0 个红色珠子中的第 $2,1,4,3,\cdots,n_0-2,n_0-3$ 个红色珠子进行重新染色. 这样得到在 n_0+4 个连续的珠子, 其颜色为 $\underbrace{\text{蓝蓝}\cdots\text{蓝}}_{n_0}$红红蓝蓝.

由 n_0 的最大性, 上述 n_0+4 个珠子的左侧两个珠子均为红色. 依次类推, 其他珠子的颜色为: 红红蓝蓝$\cdots$, 这与 n 为奇数矛盾. □

解 2 (浙江省知临中学 胡子晗) 所求的 n 为大于 3 的奇数. 此证明中, B 表示蓝色, R 表示红色.

先证 n 为偶数时, 不符合条件.

若 $4 \mid n$. 取珠子颜色依次为 RRBBRRBB$\cdots$ RRBB 则不存在珠子, 其两侧珠子同色, 故无法重新染色使得所有珠子同色.

若 $4 \nmid n$, 取珠子颜色依次为 RRBBRRBB$\cdots$ RRBBRR, 则只能对第一个或最后一个珠子操作, 由对称性不妨设对第一个珠子操作, 颜色变为 BRBBRRBB$\cdots$RRBBRR, 此时又只能对第二个珠子操作, 颜色变为 BBBBRRBB $\cdots$RRBBRR. 注意到珠子为圆排列, 故此时情况与初始情况相同, 故不能使所有珠子同色.

下证 n 为奇数时, 满足条件.

n 为奇数时, 若 n 个珠子不同色, 则存在一段奇数个连续的同色珠子, 且这段珠子相邻的两个珠子的颜色与这段珠子颜色不同. 不妨设这段珠子为蓝色, 其个数为 $2k-1, k\in\mathbb{N}^*$. 即这段珠子及其相邻的珠子颜色为 R$\underbrace{\text{BB}\cdots\text{B}}_{2k-1}$R.

若 $k=1$, RBR 可直接变为 RRR.

若 $k\geq 2$, 可依次将它变为 RBR$\underbrace{\text{B}\cdots\text{B}}_{2k-3}R, RRR\underbrace{\text{B}\cdots\text{B}}_{2k-3}$R, $\cdots$, 如此下去, 这段珠子可全变为蓝色.

这样的操作使得同色珠子的段数减少, 因此此操作会在有限步后终止. 即存

在某个时刻, 全部珠子同色. □

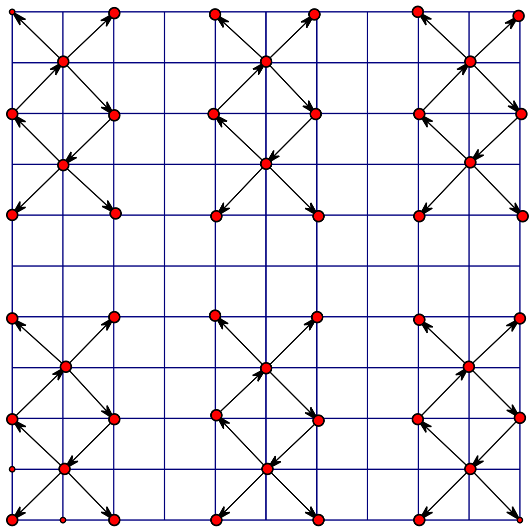
评注 这是一道中等难度的组合题. 此题的难点是证明 n 为奇数时可行.

解 1 借助反证法, 通过对连续同色珠子个数的最大值 n_0 的奇偶性分类讨论得到结论: n_0 为奇数的情形相对容易, 可直接对这 n_0 个珠子重新染色即得矛盾; n_0 是偶数的情形, 关键点是: 这 n_0 个珠子两侧的珠子的颜色是成对出现.

解 2 更为轻巧, 通过对奇数个连续的同色珠子进行重新染色, 使同色珠子的段数不断减少, 进而论证 n 为奇数时可行.

第 2 题 在一个由 10×10 个边长为 1 方格构成的方格表中选取 n 方格. 在每个被选取的方格中, 画一条有向的对角线. 已知, 对于两个有向的对角线, 要么一条对角线的终点与另一条的起点相同, 要么两个终点的距离至少是 2. 求 n 的最大值.

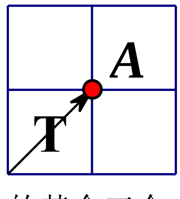
解 1 (浙江省知临中学 韩新淼) $n_{\max}=48$. 构造如下图所示.



下证: $n\le 48$.

将原 10×10 方格表向上、下、左、右各拓展一行或一列, 得到 12×12 方格表.

对每条有向对角线 $\vec{v}$, 设其所在的方格为 $T_{\vec{v}}$, 其终点为 $A_{\vec{v}}$. 记



$$S(\vec{v})=\{12\times 12\text{方格表中包含点 } A_{\vec{v}} \text{ 且不是 } T_{\vec{v}} \text{ 的方格}\}$$

则 $|S(\vec{v})|=3$. 如图, 若 $\vec{v}$ 如右图所示, 则 $S(\vec{v})$ 为除左下方格外的其余三个方格.

我们证明: 若 $\vec{v_1}\neq\vec{v_2}$, 则 $S(\vec{v_1})\cap S(\vec{v_2})=\emptyset$. $(*)$

反证法. 设存在两条对角线 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$, 满足 $S(\overrightarrow{a}) \cap S(\overrightarrow{b}) \neq \emptyset$. 设 $S \in S(\overrightarrow{a}) \cap S(\overrightarrow{b})$, 则 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 终点的距离小于 2, 且 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 均不在方格 S 中.

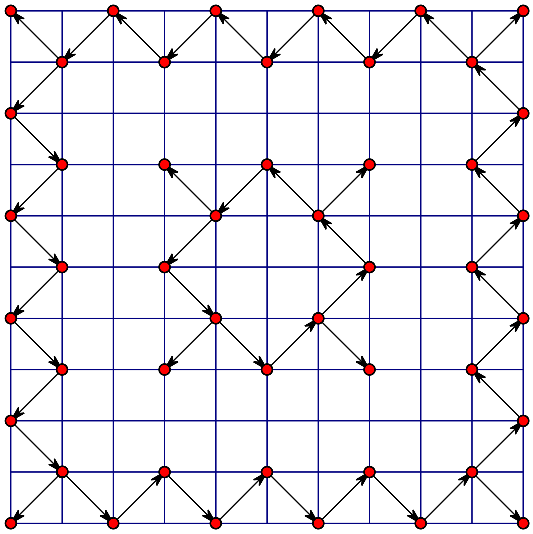
故由条件知, $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 中必有一向量起点为另一向量的终点, 不妨设 $\overrightarrow{a}$ 的起点是 $\overrightarrow{b}$ 的终点, 则 $\overrightarrow{a}$ 的起点和终点均在 S 中, 这与 $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ 均不在 S 中矛盾. $(*)$ 得证.

由 $(*)$ 知, 有向对角线条数

$$n \leq \frac{12^2}{3} = 48.$$

综上, n 的最大值为 48. □

解 2 (浙江省知临中学 胡子晗) n 的最大值为 48. 构造如下:



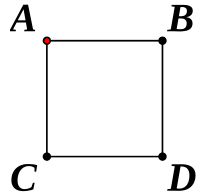
下证 $n \geq 48$.

把所有有向对角线的终点染成红色. 由题意, 不存在终点重合的两条有向对角线, 不存在两点红点距离为 1. 若存在两个距离为 $\sqrt{2}$ 的红点, 则必存在一条有向对角线, 其起点和终点均为红点.

我们证明: 若有 k 个红点 $(k \geq 49)$, 则距离为 $\sqrt{2}$ 的点对至少有 $k+1$ 对. $(*)$

事实上, 我们把这 10×10 方格表向右, 向下分别拓展一列, 一行, 得到 11×11 方格表.

对于一个红点 A, 称它右方、下方、左下方的点 B, C, D 为它的附庸, 称 A, B, C, D 这四个点为红点 A 的领土.



从而, 两个红点距离为 $\sqrt{2}$ 等价于它们的领土有公共点.

由于两个红点距离不为 1, 故不存在两个红点, 其领土有 2 个公共点, 且不存在一个点为三个红点的领土. 故由容斥原理知, 至少有 $4k - 144$ 个点为两个红点的领土, 即至少有 $4k - 144$ 个红点对之间距离为 $\sqrt{2}$. 又 $k \geq 49$,

从而 $4k-144\geq k+1$. 故 $(*)$ 成立.

因此若恰有 $k\geq 49$ 个方格满足条件, 则对应的红点有 k 个, 它们之间距离为 $\sqrt{2}$ 的点对不少于 $k+1$ 个, 则至少有 $k+1$ 条对角线, 则至少有 $k+1$ 个方格满足条件, 矛盾! 故 $n\leq 48$.

综上, n 的最大值为 48. □

评注 此题难度较大. 解法 1 中论证部分的难点是: 通过将原表格拓展成 12×12 方格表, 建立有向对角线与其终点所在的三个方格对应. 构造的时候, 需要先构造 6×4 方格表的情形, 再将 6 个该表格拼成 12×12 方格表, 再删去四周的方格即可.

解 2 建立有向对角线终点与其领土的关系, 利用任三领土无交和容斥原理得到终点个数的上界.

第 3 题 Misha 来到一个有 n 个城市的国家. 每两个城市均有道路连通. Misha 要想游玩某些城市, 但是他不能游玩同一个城市两次. 每次, 当 Misha 从城市 A 到城市 B, 总统会破坏 k 条与城市 B 相通的道路(不能破坏 Misha 正在走的道路, 且若没有足够的道路, 则破坏除 Misha 正在走的道路外的所有道路). 求 Misha 可以游玩的城市的个数的最大值, 无论总统以何种方式破坏道路.

解 (浙江省知临中学 胡子晗) 所求的最大值为 $\begin{cases}2, & n\leq k+2\\ n-k, & n\geq k+3\end{cases}$.

当 $n\leq k+2$ 时, Misha 可以总从一个城市 A 出发到另一个城市 B. 而总统可以破坏与 B 相连的除 A 外的 $n-2$ 个城市. 故此时, Misha 可游玩的城市的最大值为 2.

当 $n\geq k+3$ 时, 当 Misha 到达第 $i(i<n-k)$ 个城市时, 由于总统至多破坏与 k 条与这个城市相连的道路, 此时存在一个未被游玩的城市, 其与第 i 个城市相连的道路未被破坏. 当 Misha 游玩到第 $n-k$ 个城市时, 总统可破坏从该城市出发到达未被游玩的 k 个城市的道路, 此时, Misha 无法继续游玩. 故 Misha 至多游玩 $n-k$ 个城市. □

评注 这是一道简单的题, 只需讨论未被游玩的城市个数与 k 的大小即可.

第 4 题 将一个 2018 边形的顶点二染色, 使得相邻顶点颜色不同. 若一种颜色的顶点处的角度之和等于另一种颜色的顶点处的角度之和, 则称该多边形是“有趣的”. 对于一个凸 2019 边形, 标注一个顶点. 已知, 去掉任意一个未被标

注的点, 得到的 2018 边形均是有趣的. 证明: 若去掉标注的顶点得到的 2018 边形也是有趣的.

证明 (浙江省知临中学 胡子晗) 记该 2019 边形边形为 $V_1V_2\cdots V_{2019}$. 不妨设 V_1 是被标记的点.

记 $\alpha_i=\angle V_{i-1}V_iV_{i+1}$, $i=1,2,\cdots,2019$, 其中, $V_{2020}=V_1, V_0=V_{2019}$.

因去掉 V_2 得到的 2018 边形是有趣的, 故

$$\alpha_3-\angle V_2V_3V_1+\alpha_5+\alpha_7+\cdots+\alpha_{2019}=1008\pi.$$

因去掉 V_3 得到的 2018 边形是有趣的, 故

$$\alpha_2-\angle V_3V_2V_4+\alpha_5+\alpha_7+\cdots+\alpha_{2019}=1008\pi.$$

由上两式知 $\alpha_3-\angle V_2V_3V_1=\alpha_2-\angle V_3V_2V_4$, 从而

$$\angle V_1V_3V_4=\angle V_1V_2V_4,$$

即有 V_1,V_2,V_3,V_4 四点共圆.

同理, V_2,V_3,V_4,V_5 四点共圆, V_3,V_4,V_3,V_4 四点共圆, $\cdots$, $V_{2017},V_{2018},V_{2019},V_1$ 四点共圆, 故 $V_1,V_2,\cdots,V_{2019}$ 共圆.

于是, 我们有 V_{2019},V_1,V_2,V_3 共圆, 则 $\angle V_{2019}V_1V_3=\angle V_{2019}V_2V_3$, 即

$$\alpha_1-\angle V_2V_1V_3=\alpha_2-\angle V_1V_2V_{2019}, \tag{1}$$

而去掉 V_2 得到的 2018 边形是有趣的, 故

$$\alpha_1-\angle V_2V_1V_3+\alpha_4+\alpha_6+\cdots+\alpha_{2018}=1008\pi,$$

结合 (1) 知,

$$\alpha_2-\angle V_1V_2V_{2019}+\alpha_4+\alpha_6+\cdots+\alpha_{2018}=1008\pi,$$

即去掉 V_1 得到的 2018 边形是有趣的. □

评注 此题是较为容易的组合题. 关键是发现该 2019 边形所有顶点共圆, 进而得出角度关系.

第 5 题 n 枚硬币排在圆周上, 每枚硬币正面或反面朝上, 且圆周不能旋转. 允许如下操作: 若相邻两枚硬币均是正面朝上或反面朝上, 则可将它们都翻面. 如果两种硬币的分布方式可以通过有限次操作从一种变为另一种, 则认为两种分布等价. 问: 共有多少种不等价的分布?

解 (浙江省知临中学 郑立瑜) 所求的值为 $\begin{cases} n+1, 2\mid n \\ 2, \quad 2\nmid n \end{cases}$.

在圆周上, 依次记这些硬币为$V_1, V_2, \cdots, V_n$.

一方面, 当 $2 \mid n$ 时, 设 $n = 2k$. 每次操作把一个下标为奇数的硬币和一个下标为偶数的硬币从同正变为同反, 或从同反变为同正, 因此 $V_1, V_3, \cdots, V_{2k-1}$ 中正面硬币数与 $V_2, V_4, \cdots, V_{2k}$ 中正面硬币数的差在操作中不变, 而这个差值可取 $-k, -k+1, \cdots, k$, 因此至少有 $2k+1 = n+1$ 种.

当 $2 \nmid n$ 时, 所有硬币正面向上的个数在每次操作中奇偶性不变, 因此至少有 2 种.

另一方面, 当 $2 \mid n$ 时, 记一个分布 π 的特征量 $f(\pi)$ 为 $V_1, V_3, \cdots, V_{n-1}$ 中正面硬币数与 $V_2, V_4, \cdots, V_{n-2}$ 中正面硬币数的差. 我们对 n 归纳证明: 对任意两种分布 π, π', 若 $f(\pi) = f(\pi')$, 则两种分布等价. $(*)$

当 $n = 2$ 时, 结论显然成立.

假设结论对 $n-2$ 时成立, 下证 n 时的情形.

若 $f(\pi) = \frac{n}{2}$ 或 $-\frac{n}{2}$, 则此时, 硬币正反相间分布, 结论显然成立.

下考虑 $-\frac{n}{2} + 1 \le f(\pi), f(\pi)' \le \frac{n}{2} - 1$, 则 π, π' 均存在两个同正或同反的两个相邻硬币. 不妨设 π, π' 均存在两个同正相邻硬币. 易知我们可以将同正的相邻硬币通过操作往一个方向移动, 故不妨设 π, π' 中 V_{n-1}, V_n 位置均为正面硬币.

注意到:

正反反正 $\to$ 正正正正 $\to$ 反反正正 $\to$ 反反反反,

正正正正 $\to$ 反反正正 $\to$ 反反反反 $\to$ 反正正反,

正反正正 $\to$ 正反反反 $\to$ 正正正反 $\to$ 反反正反,

即若两个硬币状态相同, 且间隔两个硬币, 则我们可以通过几次操作, 改变这两个硬币的状态, 且不改变中间两个硬币的状态.

由于 π 中 V_{n-1}, V_n 的状态与 π' 中相同, 故对 π 中 $V_1, V_2, \cdots, V_{n-2}$ 用归纳假设知, π 可经过若干次操作变为 π'. $(*)$ 得证.

同理可证 $2 \nmid n$ 情形, 即当 $2 \nmid n$, 若两种分布中, 所有硬币正面向上的个数在每次操作中奇偶性相同, 则这两种分布等价. □

评注 此题难度较大. 本题的关键是找到每次操作中的不变量, 即每次被操作的两个硬币下标一奇一偶, 然后可通过对 n 分奇偶猜测所求的值, 然后再利用归纳法证明结论.

第 6 题 一个棋子从 100×100 的棋盘的左下角移动到右上角, 且每步向上或向右移动一格. 记 a 为恰有 70 步落在从左下角到右上角的对角线下方的路径

数, b 恰有 110 步落在从左下角到右上角的对角线下方的路径数. 试比较 a 和 b 的大小.

解 (浙江省知临中学 谢柏庭) 所求结果为: $a>b$.

记 $f_n(k)$ 为沿着格线从 $(0,0)$ 到 (n,n) 且路径上恰有 k 点 (不含起点) 在 $y=x$ 下方的最短路径数. 则所求的即为 $f_{99}(70)$ 与 $f_{99}(110)$ 大小关系.

记 $g_n(k)$ 为沿着格线从 $(0,0)$ 到 $(n,n+1)$ 且路径上恰有 k 点 (不含起点) 在 $y=x+1$ 下方的最短路径数. 我们证明:

$$g_m(0)=g_m(1)=\cdots=g_m(2m)=\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m},\forall m\in\mathbb{N}^*. \tag{$*$}$$

对 m 归纳证明.

当 $m=0$ 时, $g_0(0)=1$.

当 $m=1$ 时, $g_1(0)=g_1(1)=g_1(2)=1=\frac{1}{2}\binom{2}{1}$.

设 $m\le l$ 时, 结论成立. 当 $m=l+1$ 时, 对路径与 $y=x$ 的第一个交点 (除起点外) 分类, 可知: 对 $k\ge 1$, 有

$$g_{l+1}(k)=\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{t}\binom{2t-2}{t-1}\big(g_{m-t}(k-1)+g_{m-t}(k-2t)\big).$$

结合上式, 归纳假设和 Catalan 数递推式知,

$$\begin{aligned}g_{l+1}(k)=&\sum_{t=1}^{[m-\frac{k-1}{2}]}\frac{1}{t}\binom{2t-2}{t-1}\binom{2(m-t)}{m-t}\frac{1}{m-t+1}\\&+\sum_{t=1}^{[\frac{k}{2}]}\frac{1}{t}\binom{2t-2}{t-1}\binom{2(m-t)}{m-t}\frac{1}{m-t+1}\\=&\sum_{t=1}^{m}\frac{1}{t}\binom{2t-2}{t-1}\binom{2(m-t)}{m-t}\frac{1}{m-t+1}\\=&\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}.\end{aligned}$$

且由于当 $k=0$ 时, $g_{l+1}(k)=\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}$, 故

$$g_{l+1}(k)=\frac{1}{l+2}\binom{2l+2}{l+1},\ \forall 0\le k\le 2l+2.$$

$(*)$ 得证.

记 $k_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. 我们归纳证明: 对 $n\in\mathbb{N}^*$, 有

$$\begin{aligned}&f_n(2k)=f_n(2k+1),\ \forall 0\le k\le n-1,\\&f_n(2k+1)>f_n(2k+2),\ \forall 0\le k\le n-2.\end{aligned}\tag{$\star$}$$

$n=0,n=1$ 时, 结论显然成立.

假设结论对 $1,2,\cdots,n-1$ 成立. 下证 n 时的情形.

若第一步向右, 则有 $g_{n-1}(k-1)$ 种可能; 若第一步向上, 则对路径与 $y=x$ 的第一个交点 (除起点外) 分类.

故我们有:

$$f_n(k)=g_{n-1}(k-1)+\sum_{t=1}^{n}k_{t-1}f_{n-t}(k),$$

结合 $(*)$ 和归纳假设知,

$$\begin{aligned}
f_n(2k)&=g_{n-1}(2k-1)+\sum_{t=1}^{n}k_{t-1}f_{n-t}(2k)\\
&=g_{n-1}(2k)+\sum_{t=1}^{n}k_{t-1}f_{n-t}(2k+1)=f_n(2k+1);\\
f_n(2k+1)&=g_{n-1}(2k)+\sum_{t=1}^{n}k_{t-1}f_{n-t}(2k+1)\\
&>g_{n-1}(2k+1)+\sum_{t=1}^{n}k_{t-1}f_{n-t}(2k+2)=f_n(2k+2).
\end{aligned}$$

故 n 时 $(\star)$ 仍然成立.

$(\star)$ 得证.

由 $(\star)$ 知, $a>b$. □

评注 此题难度较大. 上面的解法需要熟悉 Catalan 数的递推性质, 再建立 $f_n(k)$ 的递推表达式, 利用归纳法得到结论.

第 7 题 Vasya 有 3 种颜色的正方形卡片共 100 张, 且每种颜色的卡片不超过 50 张. 证明: 他可以将卡片拼成 10×10 的方格表, 且任两张同色卡片没有公共边.

证明 (南京外国语学校 张棱祥) 记 3 种颜色为 A,B,C. 设 A,B,C 三种卡片分别有 x,y,z 张.

不妨设 $x\le y\le z$. 则由题设条件知: $y\ge25, z\ge33$. 将 10×10 方格表黑白间隔染色.

我们把 A,B,C 三种卡片按以下方式放到方格表中:

从第一列开始向右, 在每列中按从上到下的顺序, 把 B 卡片依次放置到方格表的黑格中, 直到 B 卡片放完为止;

从最后一列开始向左, 在每列中按从上到下的顺序, 把 C 卡片依次放置到方格表的白格中, 直到 C 卡片放完为止;

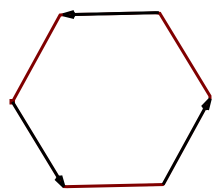
把 A 卡片放置于剩余的方格中.

由于每一列有 5 个白格, 所以后 6 列的白格全是 C 卡片. 从而 A 卡片位于 1 至 4 列的白格和 6 到 10 列的黑格, 所以任两张 A 卡片无公共边. 又任两张 B 卡片或任两张 C 卡片无公共边, 所以任两张同色卡片无公共边. □

评注 此题是一道容易的组合题. 无公共边的问题可用黑白染色的方法处理, 分别将张数多的两种卡片放置于左侧黑格和右侧白格, 余下格放入剩余卡片.

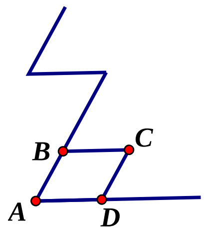
第 8 题 将正六边形分成全等的菱形, 且菱形的边与正六边形的边平行. 在正六边形的三条互不相邻的边上沿着六边形边界的逆时针方向标上箭头. 然后在每个菱形的边上标上箭头, 使得它与正六边形与其平行的边上标的箭头同向. 证明: 沿着箭头没有封闭路径.

证明 (浙江省知临中学 胡子晗) 假设存在封闭路径.



不妨设所标方向如图所示. 由于箭头每次转向只能转 $120°$, 而不能转 $60°$, 故所形成的封闭路径的内角只能为 $60°$ 或 $300°$.

我们取这样的封闭路径中所围成的面积中最小的. 因为该封闭多边形的内角不能都是 $300°$, 故必存在一个 $60°$ 的内角 $\angle A$.



由于该封闭图形是由内角为 $60°, 120°$ 的菱形拼接而成的, 故在 $\angle A$ 处必存在如图的菱形 $ABCD$.

因 $CD \parallel AB, BC \parallel AD$, 故沿着 DCB 也能构成封闭路径, 且所围成的面积变小, 这与面积的最小性矛盾!

故假设不成立, 即原命题成立. □

评注 此题是中等难度的组合题. 上面的解法的关键是发现封闭路径必存在 $60°$ 的内角, 再通过论证封闭路径内存在菱形, 结合极端假设得出矛盾.