# Cîrtoaje 不等式的最佳常数

张盛桐

(上海市上海中学, 200231)

Vasile Cîrtoaje 在《Algebraic Inequalities》一书中证明了如下代数不等式:

**定理 1** 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数且满足 $a_1 + \cdots + a_n = n$, 则

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} - n \geq \frac{8(n-1)}{n^2}(1 - a_1 a_2 \cdots a_n).$$

韩新淼同学在文 [1] 中证明了如下结果:

**定理 2** 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数且 $a_1 + \cdots + a_n = n$, 则

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} - n \geq (2\sqrt{2} - 1)(1 - a_1 a_2 \cdots a_n).$$

我们证明了下面一个更强的结果 (只需注意到 $1.846 > 2\sqrt{2} - 1$):

**定理 3** 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正实数且 $a_1 + \cdots + a_n = n$, 则

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} - n \geq \lambda(1 - a_1 a_2 \cdots a_n),$$

其中,

$$\lambda = \inf_{b>0} \frac{(b-1)^2}{b} \frac{1}{1 - b\mathrm{e}^{1-b}} \approx 1.846.$$

**证明** 对每个 $n$, 考虑函数

$$F_n(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} - n - \lambda(1 - a_1 a_2 \cdots a_n),$$

其中 $a_1 + \cdots + a_n = n, a_i > 0$.

由文 [1] 中的证明可知: $F_n$ 取到最大值 $\alpha_n$ 时, $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 仅有两种取值, 不妨设 $a_n$ 出现了 $u_n$ 次, $b_n$ 出现了 $v_n$ 次, 则有 $u_n \cdot a_n + v_n \cdot b_n = n$ 且 $u_n + v_n = n$.

**修订日期: 2018-09-28.**

注意到

$$F_n(a_1,\cdots,a_n)=F_{n+1}(a_1,\cdots,a_n,1),$$

故 $\alpha_n\ge\alpha_{n+1}$.

我们只需证对任意 $n$, 有 $\alpha_n\ge 0$.

假设结论不成立, 则存在实数 $\varepsilon>0$ 使得当 $n$ 足够大时, $\alpha_n<-\varepsilon$.

不失一般性, 设 $a_n<1, b_n>1$. 令 $c_n=\frac{u_n}{n}$, $d_n=\frac{v_n}{n}$. 从而我们得到四元组序列 $(a_n,b_n,c_n,d_n), n=1,2,\cdots$, 且有,

$$c_n=\frac{b_n-1}{b_n-a_n},\quad d_n=\frac{1-a_n}{b_n-a_n}.$$

代入到 $F_n$,

$$n\frac{(1-a_n)(b_n-1)}{a_nb_n}\le\lambda(1-e^{n(c_n\ln a_n+d_n\ln b_n)})-\varepsilon. \tag{1}$$

由于 $a_n,c_n,d_n\in[0,1]$ 和聚点原理知, 存在四元组序列的子序列, 不妨仍记为 $(a_n,b_n,c_n,d_n), n=1,2,\cdots$, 使得 $a_n$ 收敛到某个 $a\in[0,1]$, $c_n$ 收敛到某个 $c\in[0,1]$, $d_n$ 收敛到某个 $d\in[0,1]$, 且 $b_n$ 收敛到某个 $b$ 或 $b_n\to+\infty$.

我们分四种情况证明:

**(i)** $\boldsymbol{b_n\to\infty}$ **时**. 当 $n$ 足够大时, (1) 可化为

$$n\frac{1-a_n}{a_n}\le\lambda(1-e^{n(c_n\ln a_n+d_n\ln b_n)})-\varepsilon'.$$

因此 $n\frac{1-a_n}{a_n}<\lambda$, 且 $n(1-a_n)<\lambda$. 注意到

$$nd_n=v_n\ge 1,$$

将 $d_n=\frac{1-a_n}{b_n-a_n}$ 代入得

$$n(1-a_n)\ge b_n-a_n.$$

从而可得 $\lambda+1>\lambda+a_n>n(1-a_n)+a_n>b_n$ , 与 $b_n\to\infty$ 矛盾.

**(ii)** $\boldsymbol{b_n\to b>1}$ **时**. (1) 可化为

$$n\frac{(1-a_n)(b-1)}{a_nb}\le(\lambda-\varepsilon')(1-e^{n(c_n\ln a_n+d_n\ln b_n)}).$$

因此

$$n\frac{1-a_n}{a_n}<\lambda\frac{b}{b-1}.$$

从而 $\frac{1-a_n}{a_n}\to 0$ ,则 $a=1$.

进一步, 当 $n$ 足够大时,

$$n(1-a_n)=v_n(b_n-a_n)<\lambda\frac{b}{b-1},$$

其中 $v_n \in \mathbb{Z}$.

这意味着 $v_n$ 是有界的. 我们可以选取 $(a_n, b_n, c_n, d_n)$ 的一个子列, 使得 $v_n$ 恒为 $v$.

易知 $v \geq 1$. 因此 (以下 LHS 表示不等式左边, RHS 表示不等式右边)

$$\text{LHS} = n\frac{(1-a_n)(b-1)}{a_n b} = v\frac{(b_n-a_n)(b-1)}{a_n b} \to v\frac{(b-1)^2}{b}.$$

我们再计算 RHS:

$$\begin{aligned} c_n \ln a_n + d_n \ln b_n &= \frac{(b_n-1)\ln a_n + (1-a_n)\ln b_n}{b_n - a_n} \\ &= (1-a_n)(\frac{\ln b}{b-1} - 1) + o(1-a_n), \\ n(c_n \ln a_n + d_n \ln b_n) &= n(1-a_n)(\frac{\ln b}{b-1} - 1) + o(n(1-a_n)) \\ &\to v(\ln b - b + 1). \end{aligned}$$

故

$$\lambda - \varepsilon' \geq \frac{v(b-1)^2}{b(1-e^{v(\ln b + 1 - b)})} \geq \frac{(b-1)^2}{b(1-e^{\ln b + 1 - b})}.$$

这与 $\lambda$ 的定义矛盾.

**(iii) $b_n \to 1$ 且 $a < 1$ 时**,

与情形 2 的证明类似, 我们同样可以得到结论.

**(iv) $b_n \to 1$ 且 $a_n \to 1$ 时**,

利用不等式 $1 - e^x \leq -x$, 我们有, 当 $n$ 足够大时,

$$n(1-a_n)(b_n-1) \leq (\lambda - \varepsilon')(-n(c_n \ln a_n + d_n \ln b_n)),$$

即

$$(1-a_n)(b_n-1) \leq (\lambda - \varepsilon')(-(c_n \ln a_n + d_n \ln b_n)).$$

对 $\ln(1-x)$ 进行 Taylor 展开得:

$$\begin{aligned} -(c_n \ln a_n + d_n \ln b_n) =& \frac{(b_n-1)((1-a_n) + (1-a_n)^2/2 + o(1-a_n)^2)}{b_n - a_n} \\ &+ \frac{(1-a_n)((1-b_n) + (1-b_n)^2/2 + o(1-b_n)^2)}{b_n - a_n} \\ =&(b_n-1)(1-a_n)(1/2 + o(1)). \end{aligned}$$

因此 $\lambda > 2$, 矛盾.

我们再说明 $\lambda$ 在渐进意义下是最优的.

对固定的 $b > 0$, 先取 $a_1 = b$, $a_2 = \cdots = a_n = \frac{n-b}{n-1}$.

令 $n \to \infty$ 可以得到

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}-n}{(1-a_1a_2\cdots a_n)} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{b}+(n-1)\left(\frac{n-1}{n-b}\right)-n}{1-b\left(1+\frac{1-b}{n-1}\right)^{n-1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{b}+\frac{(b-2)n+1}{n-b}\right)\cdot\frac{1}{1-b\mathrm{e}^{1-b}} \\
&= \frac{(b-1)^2}{b}\cdot\frac{1}{1-b\mathrm{e}^{1-b}} \geq \lambda.
\end{aligned}$$

再对 $b$ 取下确界就可以得到结论. □

## 参考文献


[1] 韩新淼. 关于 Cîrtoaje 不等式的一个注记 [J]. 数学新星网 · 学生专栏, 2018-10-05 期.