2018 年北大清华金秋营试题简析

孙孟越[1] 叶龙翔[2] 杜航[3] 刘浩宇[4] 骆晗[5] 俞然枫[6]

(1. 清华大学, 100084; 2. 安徽省安庆第一中学, 246000;

3. 成都市第七中学, 610041; 4. 浙江省杭州第二中学, 310053;

5. 浙江省宁波市镇海中学, 315200; 6. 南京师范大学附属中学, 210003)

金秋十月, 北京大学和清华大学如期举办了数学学科营.

北大的考试时间为 2018 年 10 月 12 日 13 : 30 − 17 : 30 和 10 月 13 日 8 : 00 − 12 : 00, 每天 4 个题. 清华的考试时间为 2018 年 10 月 12 日 13 : 30 − 17 : 00 和 10 月 13 日 8 : 30 − 12 : 00, 第一天 4 个题, 第二天 3 个题.

本文给出这些题目的解答以及一些简评, 其中解答人的姓名随解答给出.

I. 试 题

一、 北大金秋营试题

1. 两圆 ω_1, ω_2 外切且不是等圆. 两圆的一条外公切线切 ω_1 于 A, 切 ω_2 于 B. ω_1 与 ω_2 的切点在圆 ω_3 内, 圆 ω_3 与直线 AB 相离且 ω_3 交 ω_1 于 C, D 两点, 交 ω_2 于 E, F 两点. CD 和 EF 不平行. 证明: ω_3 与以 AB 为直径的圆正交的充分必要条件是直线 AB, CD, EF 三线共点.

2. 设 S 为所有大于等于 2018 的正整数组成的集合. 求所有函数 $f\colon S \to \mathbb{Z}$, 满足对任意的 $i, j \in S$, 有 $(i+j)\big(f(i)+f(j)\big) - 4f(i)f(j)$ 为某个整数的平方.

3. 我们称一个长度为 n 的非增的非负整数序列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为 $D-$唯一的, 如果仅存在唯一的 n 阶无向简单图, 满足其各个顶点的度数分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

这里的唯一是图同构意义下的: 两个图 G 与 H 同构是指, 存在一个 G 的顶点集到 H 的顶点集的双射 f, 满足 u, v 连边当且仅当 $f(u), f(v)$ 连边.

记长度为 n 的 $D-$唯一的序列个数为 d_n, 证明: 当 $n \geq 3$ 时, $d_n \geq 3\cdot 2^{n-2} - 2$.

收稿日期: 2018-10-15.

4. 给定正整数 $n>1$, 求最小的实数 λ, 使得对任意实数 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\right)^2 \leq \lambda\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

5. 有 2018 名学生围成一圈. 称一个同学是优秀的, 如果他的两边站着的人和自己性别都不同. 求优秀的男生数与优秀的女生数的平方差的最大值.

6. 若互素的正整数 $n>k$ 满足 $n-k \mid n^{n^n}-k^{k^k}$, 则称 (n,k) 是一个好对. 证明: 存在无穷多组好对 (n,k), 使得 $(n,1013k)$ 也为好对.

7. 给定整数 $n>1$. 已知正整数 m 和集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的不同子集 $A_1,A_2,\ldots,A_m$ 满足对任意 $1\leq i<j\leq n$, $A_1,A_2,\ldots,A_m$ 中恰好有 $n-j+i$ 个集合同时含有 i,j. 求 $\sum\limits_{k=1}^{m}|A_k|^2$ 的最小可能值.

8. 设 $\mathbb{R}$ 是实数集, $\mathbb{C}$ 是复数集.

(1) 设函数 $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, $|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|$. 证明: 对任意实数 x,y, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(2) 设函数 $f\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 满足对任意 $x,y\in\mathbb{C}$, $|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|$. 证明或否定: 对任意复数 x,y, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

二、 清华金秋营试题

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D,E 在边 AB,AC 上, $CD\cap BE=I$, $AI\cap DE=J$, $AI\cap BC=K$, 求 $AJ\cdot AK$ 与 AI^2 的大小关系.

2. 证明: 在平面上任给 n 个整点, 存在一个次数不超过 $\sqrt{2n}$ 的非零二元多项式使得这些整点都是它的零点.

3. 设正整数 $n>1$, 证明:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2n}}-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2n}}<\frac{1}{n^2\sqrt{1+n^2}}.$$

4. 是否存在正整数 $n\geq 2^{2018}$, 使得不存在正整数 x,y,u,v, 满足 $u,v>1$ 且 $n=x^u+y^v$.

5. 设一个凸多边形和它的内部能被 n 个半径不必相等的圆盘完全覆盖. 证明或否定: 可以从这些圆盘中选出一些两两不交的圆盘, 使得将它们半径扩大三倍之后, 可以覆盖原凸多边形.

6. 对前 n 个正整数用 k 种颜色染色, 使得无法从中选出三个不同色的正整数构成等差数列. 设 k 的最大值为 $f(n)$. 证明: $\log_3 n \le f(n) \le 1 + \log_2 n$.

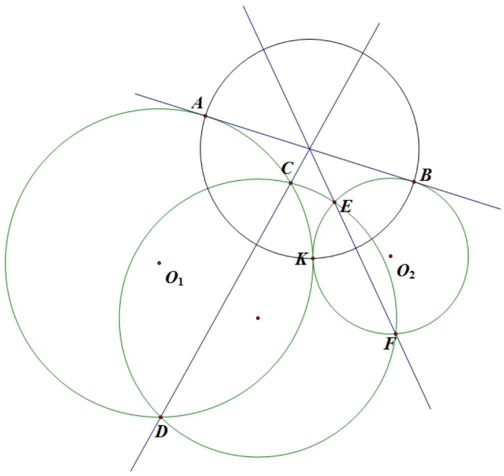
7. 给定正整数 n, 给定 n 个实数 $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \dots, n$. 对 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的非空子集 I, 定义 $P_I = \prod_{i \in I} p_i$, 并且 $P_\emptyset = 1$. 对任意 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的非空子集 I, 取一个实数 X_I, 再取 $X_\emptyset = 1$. 证明:

$$\sum_{I \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \sum_{J \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \frac{X_I X_J}{P_{I \cap J}} \ge \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i).$$

II. 解答与评注

一、 北大金秋营试题解析

1. 两圆 ω_1, ω_2 外切且不是等圆. 两圆的一条外公切线切 ω_1 于 A, 切 ω_2 于 B. ω_1 与 ω_2 的切点在圆 ω_3 内, 圆 ω_3 与直线 AB 相离且 ω_3 交 ω_1 于 C, D 两点, 交 ω_2 于 E, F 两点. CD 和 EF 不平行. 证明: ω_3 与以 AB 为直径的圆正交的充分必要条件是直线 AB, CD, EF 三线共点.



证明 (叶龙翔, 俞然枫)

设线段 AB 中点为 M, 则由 $MA^2 = MB^2$ 可得, M在 ω_1, ω_2 的根轴 l 上.

由蒙日定理可得, CD, EF 交于 l 上一点 G. 记以 AB 为直径的圆为 ω_4. 设 ω_3, ω_4 交点为 T_1, T_2.

若 AB, CD, EF 共点, 则此点在 l 上, 也在 AB 上, 故为 M 点. 则 $MC \cdot MD = MB^2 = MT_1^2$. 从而 MT_1 为 ω_3 切线, 即 ω_3, ω_4 正交.

若 ω_3, ω_4 正交, 则 MT_1 为 ω_3 切线. 从而 M 到 ω_3, ω_1 的圆幂相等, 这表明 M 在 CD 上. 类似地, 有 M 在 EF 上. 故 AB, CD, EF 共点. □

评注 非常简单的第一题, 熟悉反演的同学可以很快做出. 考场上并没有给图, 也没有给出正交的定义, 需要同学们提前知道.

2. 设 S 为所有大于等于 2018 的正整数组成的集合. 求所有函数 $f\colon S\to\mathbb{Z}$, 满足对任意的 $i,j\in S$, 有 $(i+j)\big(f(i)+f(j)\big)-4f(i)f(j)$ 为某个整数的平方.

答案 所求函数为 $f(x)=x,\forall x\in S$ 以及 $f(x)=0,\forall x\in S$.

解 (杜航, 孙孟越, 刘浩宇)

记条件为 $P(i,j)$.

由 $P(p,p)$ 知 $(p-f(p))\cdot f(p)$ 为完全平方数. 设 $(p-f(p))\cdot f(p)=y^2$, 则

$$p^2=4y^2+(p-2f(p))^2.$$

这时, 取 $p\in S$ 为 $4k+3$ 型素数, 则由 -1 不是 p 的二次剩余知, 必有 $p\mid 2y, p\mid p-2f(p)\implies y=0, |p-2f(p)|=p$. 因此, $f(p)=p$ 或者 $f(p)=0$.

下面分两种情况讨论.

情形 1. 若对所有 $4k+3$ 型素数 $p\in S$, 有 $f(p)=p$. 则对任意 $x\in S$, 由 $P(x,p)$ 可知 $(x+p)(f(x)+p)-4f(x)\cdot p$ 为完全平方数. 即

$$(2p+x-3f(x))^2-(x-f(x))(x-9f(x))$$

是完全平方数.

由于 S 中存在无穷多个 $4k+3$ 型素数, 我们取一个 $4k+3$ 型素数 p 满足

$$2\cdot|2p+x-3f(x)|>1+|(x-f(x))(x-9f(x))|.$$

那么有

$$\Big(2p+x-3f(x)-1\Big)^2<\Big(2p+x-3f(x)\Big)^2-\Big(x-f(x)\Big)\Big(x-9f(x)\Big).$$
$$\Big(2p+x-3f(x)\Big)^2-\Big(x-f(x)\Big)\Big(x-9f(x)\Big)<\Big(2p+x-3f(x)+1\Big)^2.$$

所以必须有 $\Big(x-f(x)\Big)\Big(x-9f(x)\Big)=0$, 也就是 $f(x)=x$ 或者 $f(x)=\frac{x}{9}$. 后者与条件 $P(x,x)$ 矛盾. 因此 $f(x)=x,\forall x\in S$.

情形 2. 若存在 $4k+3$ 型素数 $p\in S$, 使得 $f(p)=0$. 记 $T=\{x\in S|f(x)=0\}$, 则 $p\in T$.

对任意 $4k+3$ 型素数 $q\in S$, 由 $P(p,q)$ 知 $(p+q)f(q)$ 是平方数. $f(q)=0$ 或 q, 但 $(p+q)q$ 不是平方数, 所以 $f(q)=0$. 因此任意 $4k+3$ 型的素数 $q\in S$, 有 $q\in T$.

下面证明对任意 $n\in S$, 有 $n\in T$.

取定 $4k+3$ 型的 T 中素数 $p \neq q$ (由于 $4k+3$ 型素数有无穷个, 这样的 p, q 必然存在). 记 $N_0 = 2018 + (p-q)^2 > 2018$.

先证明整数 $n \geq N_0 = 2018 + (p-q)^2$ 都有 $n \in T$. 任取一个 $n \geq N_0$.

由 $P(n,p), P(n,q)$ 可得 $f(n)(n+p), f(n)(n+q)$ 都是平方数, 若 $f(n) \neq 0$, 结合算术基本定理知, $(n+p)(n+q)$ 是完全平方数. 但

$$(2n+p+q-1)^2 < 4(n+p)(n+q) = (2n+p+q)^2 - (p-q)^2 < (2n+p+q)^2,$$

故 $(n+p)(n+q)$ 不是完全平方数, 矛盾. 所以对所有正整数 $n \geq N_0$, 有 $n \in T$.

再证明 $2018 \leq n < 2018 + (p-q)^2$ 时, 有 $n \in T$.

任取 $2018 \leq m < 2018 + (p-q)^2$.

由 $P(m, N_0), P(m, N_0+2)$ 可知 $f(m)(m+N_0), f(m)(m+N_0+2)$ 都是平方数. 若 $f(m) \neq 0$, 则 $(m+N_0)(m+N_0+2)$ 是平方数, 但

$$(m+N_0)(m+N_0+2) = (m+N_0+1)^2 - 1.$$

不是完全平方数,矛盾. 故对任意 $n \in S, f(n) = 0$.

结合情形 1 和情形 2, 原题解为: $f(x) = x, \forall x \in S$ 以及 $f(x) = 0, \forall x \in S$. $\square$

评注 这个函数方程需要一点点二次剩余以及估计的技术, 比预想中困难.

3. 我们称一个长度为 n 的非增的非负整数序列 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为 $D-$唯一的, 如果仅存在唯一的 n 阶无向简单图, 满足其各个顶点的度数分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

这里的唯一是图同构意义下的: 两个图 G 与 H 同构是指, 存在一个 G 的顶点集到 H 的顶点集的双射 f, 满足 u, v 连边当且仅当 $f(u), f(v)$ 连边.

记长度为 n 的 $D-$唯一的序列个数为 d_n, 证明: 当 $n \geq 3$ 时, $d_n \geq 3 \cdot 2^{n-2} - 2$.

证明 (杜航, 骆晗)

对 n 用数学归纳法.

当 $n = 3$ 时, 序列 $(2,2,2), (2,1,1), (1,1,0), (0,0,0)$ 均是 $D-$唯一的.

假设 $n-1$ 时成立 $(n \geq 4)$, 考虑 n 的情形.

对每个 $n-1$ 时是 $D-$唯一的序列 $(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1})$, 数组

$$(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, 0)$$

也是 $D-$唯一的 (只需在 $n-1$ 时的图中加入一个孤立点即可). 数组

$$(n-1, a_1+1, a_2+1, \cdots, a_{n-1}+1)$$

也是 $D-$唯一的 (只需在 $n-1$ 时的图中加入一个与其他点均相连的点即可).

并且上面给出的这些长为 n 的序列互不相同 (因为 $a_1 \le n-2, a_{n-1}+1 \ge 1$).

当 n 为偶数时, $(1,1,\cdots,1)$ 是 $D-$唯一的 (一组 $\frac{n}{2}$ 个匹配), 其补图对应的序列 $(n-2,n-2,\cdots,n-2)$ 也是 $D-$唯一的.

当 n 为奇数时, $(1,1,\cdots,1,2)$ 是 $D-$唯一的 (一组 $\frac{n-3}{2}$ 个匹配与一个长为 2 的链), 其补图对应的序列 $(n-2,n-2,\cdots,n-2,n-3)$ 也是 $D-$唯一的.

故 $d_n \ge 2d_{n-1}+2 \ge 3\cdot 2^{n-2}-2$. 命题对 n 成立, 由归纳原理知结论成立.□

评注 归纳构造是容易想到的. 中等难度组合题. 事实上, 这个系数 3 可以加强成 $\ln n$ 量级的.

4. 给定正整数 $n>1$, 求最小的实数 λ, 使得对任意实数 $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge 0$, 有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\right)^2 \le \lambda\sum_{k=1}^{n}a_k^2.$$

解 对 $1\le i\le \left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, 令 $a_i=1$. 令其余的 $a_i=0$. 则有

$$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2\cdot\left(n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\le\lambda\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.$$

从而, 由于 $n>1$, 所以 $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor>0$,

$$\lambda\ge\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left(n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)=\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor.$$

下证 $\lambda=\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$ 时不等式成立.

由于 $a_1\ge a_2\ge\ldots\ge a_n\ge 0$, 结合均值不等式知

$$0\le a_1+a_2+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\le a_1+a_2+\cdots+a_k-ka_k=\sum_{j=1}^{i}\left(a_j-a_i\right).$$

故我们有

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\right)^2\le\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}(a_j-a_i)\right)^2. \qquad (1)$$

对 $1\le i\le n-1$, 令 $b_i=a_{i+1}-a_i$, $b_n=a_n$. 则 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 都是非负实数.

$$\begin{aligned}(1)\text{ 右边}&=\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=j}^{i-1}b_k\right)^2\\&=\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}jb_j\right)^2\\&=\sum_{i=2}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i-1}i^2b_i^2+2\sum_{1\le j<k\le i-1}jkb_jb_k\right)\end{aligned}$$

$$=\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)i^2b_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n-1}(n-j)ijb_ib_j.$$

故只要证明

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)i^2b_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n-1}(n-j)ijb_ib_j\le\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k^2. \tag{2}$$

代入 $a_i=\sum\limits_{j=i}^{n}b_j$, 可得

$$\begin{aligned}\lambda\sum_{k=1}^{n}a_k^2&=\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}b_j\right)^2\right)\ge\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i}^{n-1}b_j\right)^2\right)\\&=\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor\left(\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i}^{n-1}b_j^2+2\sum_{i\le j<k\le n-1}b_jb_k\right)\right)\\&=\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor\left(\sum_{i=1}^{n-1}ib_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n-1}ib_ib_j\right).\end{aligned}$$

故只要证明

$$\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)i^2b_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n-1}(n-j)ijb_ib_j\le\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor\left(\sum_{i=1}^{n-1}ib_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n-1}ib_ib_j\right). \tag{3}$$

注意到对整数 $1\le i\le n-1$, $i(n-i)\le\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$, $b_i\ge0$, 故有

$$\begin{aligned}&(3)\text{右边}-(3)\text{左边}\\&=\sum_{i=1}^{n-1}i\left(\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor-i(n-i)\right)b_i^2+2\sum_{1\le i<j\le n-1}i\left(\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor-(n-j)j\right)b_ib_j\ge0.\end{aligned}$$

故 (3) 成立, 因此所求 λ 的最小值为 $\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$. □

评注 只要想到了怎么处理几何平均, 这个题剩下部分本质上并不困难. 不过, 在进行 $\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\ge a_k$ 的放缩时, 有很多同学漏掉了用均值不等式证明的另外一边, 又因为 x^2 并不在整个定义域严格单调增, 就导致整个解答在逻辑上是错误的. 调整法也可以处理这个问题, 只是较为繁琐. 下面给出用调整法的证明.

另解 (俞然枫)

$n=1$ 时, 易知 λ 最大值为 0. 下面考虑 $n>1$ 的情形.

对 $1\le i\le\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$, 令 $a_i=1$. 令其余的 $a_i=0$. 则有

$$\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2\cdot\left(n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)\le\lambda\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor.$$

从而, 由于 $n>1$, 所以 $\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor>0$, $\lambda\ge\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\left(n-\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)=\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$. 下证 $\lambda=\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor$ 时

不等式成立.

引理　对于 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \le t \le n$, 有

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor a_t^2 \ge (n-t)\left(\left(\sum_{i=1}^{t} a_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{t-1} a_i\right)^2\right) - \left(\sum_{i=1}^{t-1} a_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{t} a_i - t\sqrt[t]{\prod_{i=1}^{t} a_i}\right)^2.$$

引理的证明　若 $a_t = 0$, 结论显然.

若 $a_t > 0$. 记

$$a_t = x, \quad r = \frac{1}{x}\left(\prod_{i=1}^{t} a_i\right)^{\frac{1}{t}}, \quad \sum_{i=1}^{t-1} a_i = S.$$

由于 $a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \cdots \ge a_t > 0$, 故 $r \ge \frac{x}{x} = 1$. 上式可整理为

$$\begin{aligned} &\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor x^2 \ge (n-t)\,x\,(2S+x) - S^2 + (S+x-trx)^2 \\ \iff &\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor x \ge 2S\,(n-t+1-tr) + (n-t)\,x + (1-tr)^2\,x. \end{aligned}$$

由于 $S \ge (t-1)\sqrt[t-1]{\prod_{i=1}^{t-1} a_i} \ge (t-1)\,rx$, 而

$$r \ge 1 \implies n-t+1-tr \le n-2t+1 \le 0.$$

故只要证

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \ge -2r\,(t-1)\,((r+1)\,t-n-1) + n - t + (tr-1)^2. \tag{1}$$

我们记 (1) 右边为关于 r 的函数 $f(r)$, 则其导数

$$f'(r) = -2\,(2t-n-1)\,(t-1) - 2t\,(t-2)\,(r-1) \le 0.$$

最后一个不等号是因为

$$2t-n-1 \ge 0, t-1 \ge 0, t\,(t-2) \ge 0, r-1 \ge 0.$$

从而只要证 $r = 1$ 时成立, 即

$$\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \ge -2\,(t-1)\,(2t-n-1) + n - t + (1-t)^2.$$

由 $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor \ge \frac{n^2-1}{4}$ 知, 只要证明

$$\begin{aligned} &\frac{n^2-1}{4} \ge -2\,(t-1)\,(2t-n-1) + n - t + (1-t)^2 \\ \iff &(6t-3-n)\,(2t-1-n) \ge 0. \end{aligned}$$

由 $n \le 2t-1 \le 6t-3$, 知成立. 引理得证.

回到原题. 记

$$F(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor\sum_{k=1}^{n}a_k^2-\sum_{k=1}^{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\right)^2.$$

只要证明 F 非负即可.

注意到在 $\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1\le t\le n$ 时

$$\begin{aligned}&F(a_1,a_2,\ldots,a_t,\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-t\text{个}})-F(a_1,a_2,\ldots,a_{t-1},\underbrace{0,0,\ldots,0}_{n-t+1\text{个}})\\&=\left\lfloor\frac{n^2}{4}\right\rfloor a_t^2-(n-t)\left(\left(\sum_{i=1}^{t}a_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{t-1}a_i\right)^2\right)\\&\qquad+\left(\sum_{i=1}^{t-1}a_i\right)^2-\left(\sum_{i=1}^{t}a_i-t\sqrt[t]{\prod_{i=1}^{t}a_i}\right)^2\\&\ge 0.\end{aligned}$$

反复运用引理知, 只需考虑

$$a_n=a_{n-1}=\ldots=a_{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor+1}=0. \tag{2}$$

的情况.

记 $m=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, 则 $\lambda=m\,(n-m)$. 结合 $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_k\ge 0$ 以及均值不等式知

$$0\le a_1+a_2+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\le a_1+a_2+\cdots+a_k-ka_k=\sum_{j=1}^{i}\left(a_j-a_i\right).$$

在条件 (2) 下, 我们得到

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\left(a_1+a_2+\cdots+a_k-k\sqrt[k]{a_1a_2\cdots a_k}\right)^2\\\le&\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{i}\left(a_j-a_i\right)\right)^2+(n-m)\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)^2.\end{aligned} \tag{3}$$

再由条件 (2), 我们有

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\sum_{k=1}^{m}a_k^2. \tag{4}$$

由 (3),(4), 只要证

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{i}\left(a_j-a_i\right)\right)^2&\le m\,(n-m)\sum_{k=1}^{m}a_k^2-(n-m)\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)^2\\&=(n-m)\left(m\sum_{k=1}^{m}a_k^2-\left(\sum_{k=1}^{m}a_k\right)^2\right)\end{aligned}$$

$$= (n-m) \sum_{1 \le i \le j \le m} (a_i - a_j)^2. \tag{5}$$

而对 $1 \le i \le m$, 由柯西不等式, 以及 $i \le m \le n-m$ 知

$$\left(\sum_{j=1}^{i} (a_j - a_i)\right)^2 \le i \left(\sum_{j=1}^{i} (a_i - a_j)^2\right) \le (n-m) \left(\sum_{j=1}^{i} (a_i - a_j)^2\right).$$

从而

$$(5) \text{ 左边} \le (n-m) \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{i} (a_i - a_j)^2 = (5) \text{ 右边}.$$

综上所述, 所求 λ 的最小值为 $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$. □

5. 有 2018 名学生围成一圈. 称一个同学是优秀的, 如果他的两边站着的人和自己性别都不同. 求优秀的男生数与优秀的女生数的平方差的最大值.

解 (孙孟越)

把连续的相同性别的同学打包, 并且包两侧是异性同学, 则把这包同学称为一个段. 这样, 圆周上的人被打包成了男生段和女生段, 并且男生段和女生段交替出现.

注意到, 优秀的男生数即为长为 1 的男生段数, 优秀的女生数即为长为 1 的女生段数.

我们来进行调整, 只考虑男女生都存在的情况. 任取一个长 >1 的男生段, 只留下其中任意一个男生, **把剩下的男生变为女生**. 这样的操作下, 长为 1 的男生段个数不减, 长为 1 的女生段个数不增. 故优秀的男生数和优秀的女生数的平方差不减.

每次调整使男生的数量严格减少, 故有限次后, 必然每个男生段长度都是 1.

设男生有 x 个, 则有 x 个长为 1 的男生段. 则女生有 $2018-x$ 个, 再设有 m 个长为 1 的女生段.

注意到男生段和女生段个数相等, 故女生段也有 x 个.

这时, 女生有 m 段长为 1, 有 $x-m$ 段长至少是 2, 故

$$m + 2(x-m) \le 2018 - x \implies m \ge 3x - 2018. \tag{1}$$

分两类情况讨论. 若 $x \le \frac{2018}{3}$, 即 $x \le 672$, 则

$$x^2 - m^2 \le x^2 \le 672^2 = 451584.$$

若 $x \ge \frac{2018}{3}$, 即 $x \ge 673$, 则

$$x^2 - m^2 \le x^2 - (3x-2018)^2 \le 757^2 - (3 \cdot 757 - 2018)^2 = 509040.$$

这里, 我们用到 $x^2-(3x-2018)^2=-8(x-\frac{3027}{4})^2+\frac{1018081}{2}$, 在 $x=757$ 时取到 $x\in\mathbb{Z}$ 上的最大值.

综上, $x=757, y=2018-757=1261, m=3\cdot757-2018=253$ 时, 取到最大值 509040.

更具体地, 当 757 个男生中间分别有 $\underbrace{1,1,\ldots,1}_{253\text{个}},\underbrace{2,2,\ldots,2}_{504\text{个}}$ 个女生的时候取到平方差的最大值. $\square$

评注 画个图, 想清楚本质即可. 这里的把男生变为女生是本质的调整.

在刻画清楚结构后, 也可以不用调整法, 直接导出 (1), 方法如下.

给每个优秀的男生(设为 A 个)两边的女生送盒巧克力, 这样送出了 $2A$ 盒巧克力. 每个优秀的女生(设为 B 个)收到至多 2 盒巧克力, 其余每个女生(设为 C 个)收到至多 1 盒巧克力. 这表明

$$2B+C\geq 2A \iff 2B+(2018-A-B)\geq 2A \iff B\geq 3A-2018.$$

6. *若互素的正整数 $n>k$ 满足 $n-k\mid n^{n^n}-k^{k^k}$, 则称 (n,k) 是一个好对. 证明: 存在无穷多组好对 (n,k), 使得 $(n,1013k)$ 也为好对.*

证明 (孙孟越)

对任意正整数 $m\geq 2$, 我们来验证 $(2^m+1013,1)$ 即为满足要求的好对.

显然对任意正整数 $n>1$, $(n,1)$ 都是好对, 故只要验证 $(2^m+1013,1013)$ 是好对即可.

记 $A=2^m+1013, B=1013$, 则 A,B 互质.

由于 $\varphi(2^{m-1})=2^{m-2}\mid A-B$, $(B,2)=1$, 结合欧拉定理知, $2^{m-1}\mid B^A-B^B$. 由于 $2^{m-1}\mid A-B$, 故有 $2^{m-1}\mid A^A-B^B$.

由于 $\varphi(2^m)=2^{m-1}\mid A^A-B^B$, $(B,2)=1$, 由欧拉定理, $2^m\mid B^{A^A}-B^{B^B}$. 由于 $2^m\mid A-B$, 故有 $2^m\mid A^{A^A}-B^{B^B}$. 又 $A-B=2^m$, 故 $A-B\mid A^{A^A}-B^{B^B}$.

综上, $(2^m+1013,1)$ 即为满足要求的好对. 由 m 可以取无穷个值 (全体 ≥ 2 的整数), 不同的 m 对应的 $(2^m+1013,1)$ 也不同. 这表明结论成立. $\square$

评注 由于疏忽, 这个题在卷面上漏打了 $n>k$, 变得异常简单 (注意任意正整数 $k>1$, $(1,k)$ 都是好对). 抓住了这个漏洞的同学 (大约占考生的 1/4) 都得了满分. 如果要求 $n>k>1$, 本题结论仍然成立, 有兴趣的读者可以尝试一下.

7. *给定整数 $n>1$. 已知正整数 m 和集合 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的不同子集*

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ 满足对任意 $1 \le i < j \le n$, $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 中恰好有 $n-j+i$ 个集合同时含有 i, j. 求 $\sum\limits_{k=1}^{m} |A_k|^2$ 的最小可能值.

解 (刘浩宇)

首先考虑集合 $A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{1,2,3\}, \cdots, A_{n-1} = \{1,2,\cdots,n\}, A_n = \{2,3,\cdots,n\}$, $A_{n+1} = \{3,4,\cdots,n\}, \cdots, A_{2n-1} = \{n-1,n\}$.

对任意 $1 \le i < j \le n$, 有 i, j 同时出现在 $(n-j)+i$ 个集合中, 满足条件. 此时,有

$$\sum_{i=1}^{2n-1} |A_i|^2 = 2^2 + 3^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 + (n-1)^2 + \cdots + 3^2 + 2^2 = \frac{2n^3+n-6}{3}.$$

以下证明

$$\sum_{i=1}^{m} |A_i|^2 \ge \frac{2n^3+n-6}{3}.$$

对 $1 \le i \le n$, 设 i 出现在 x_i 个集合中. 对 $1 \le i < j \le n$, 设 i, j 同时出现在 $x_{i,j}$ 个集合中. 由条件, $x_{i,j} = n-j+i, \forall 1 \le i < j \le n$.

再来估计 x_i.

首先, $x_1 \ge x_{1,2} = n-1, x_n \ge x_{n-1,n} = n-1$.

其次, 对于 $2 \le i \le n-1$, 有 $x_i \ge x_{i-1,i} \ge n-1$.

如果 $x_i = n-1$. 那么 i 所在的所有集合均含有 $i-1, i, i+1$, 所以 $i-1, i+1$ 同时出现在至少 $n-1$ 个集合中. 但 $x_{i-1,i+1} = n-(i+1)+(i-1) = n-2$, 矛盾.

因此, 对于 $2 \le i \le n-1$, 有 $x_i \ge n$. 从而

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} |A_i|^2 &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{a \in A_i} \sum_{b \in A_i} 1 \\
&= \sum_{a,b} \sum_{\substack{i \\ a,b \in A_i}} 1 \\
&= \sum_{1 \le a \le n} x_a + 2 \sum_{1 \le a < b \le n} x_{a,b} \\
&\ge 2(n-1) + (n-2)n + 2 \sum_{1 \le a < b \le n} (n-b+a) \\
&= n^2 - 2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{\substack{b-a=k \\ 1 \le a < b \le n}} (n-k) \\
&= n^2 - 2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} i^2
\end{aligned}$$

$$= \frac{2n^3+n-6}{3}.$$

综上所述, $\sum\limits_{i=1}^{m}|A_i|^2$ 的最小值为$\frac{2n^3+n-6}{3}$. □

评注 算两次是常用的技术, 在这个题中再次出现了, 算是一道中等偏难的组合题.

8. 设 $\mathbb{R}$ 是实数集, $\mathbb{C}$ 是复数集.

(1) 设函数 $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 满足对任意 $x,y\in\mathbb{R}$, $|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|$. 证明: 对任意实数 x,y, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

(2) 设函数 $f\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 满足对任意 $x,y\in\mathbb{C}$, $|f(x-y)|=|f(x)-f(y)|$. 证明或否定: 对任意复数 x,y, $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

证明 (孙孟越)

(1) 假设存在 a,b 满足 $f(a+b)\neq f(a)+f(b)$, 又有

$$|f(a)|=|f(a+b)-f(b)|, |f(b)|=|f(a+b)-f(a)|.$$

故只能有

$$-f(a)=f(a+b)-f(b), -f(b)=f(a+b)-f(a).$$

结合两式得, $f(a)=f(b)$, $f(a+b)=0$. 故我们有

$$|f(b)-f(-a)|=|f(b+a)|=0 \implies f(-a)=f(b)=f(a).$$

由于 $f(a+b)\neq f(a)+f(b)$ 知, $f(a)\neq 0$. 我们有

$$\left|f\left(\frac{a}{2}\right)\right|=\left|f(a)-f\left(\frac{a}{2}\right)\right| \implies f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{2}f(a).$$

类似地, 由于 $f(-a)\neq 0$, 以及

$$\left|f\left(\frac{-a}{2}\right)\right|=\left|f(-a)-f\left(\frac{-a}{2}\right)\right| \implies f\left(\frac{-a}{2}\right)=\frac{1}{2}f(-a)=\frac{1}{2}f(a).$$

故有 $|f(a)|=|f(\frac{a}{2})-f(\frac{-a}{2})|=0$, 这与 $f(a)\neq 0$ 相矛盾, 故原题结论成立.

(2) 取 $f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Re(x)}-1$, 这里 i 是虚数单位, e 是自然对数的底数, $\Re(x)$ 是 x 的实部. 则

$$|f(x)-f(y)|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Re(x)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Re(y)}\right|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\Re(x)-\Re(y))}-1\right|=\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Re(x-y)}-1\right|=|f(x-y)|.$$

但是

$$f(2\pi)-2f(\pi)=0-2(-1-1)=4\neq 0.$$

所以结论是否定的. □

评注 事实上把这个问题中的 $\mathbb{R},\mathbb{C}$ 换成 $\mathbb{Z}$ 时结论是不成立的. 如可以取 $f\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ 满足 $f(n)=n-2\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$. 这启发我不能只考虑 a,b 在 $\mathbb{Z}$ 上的线性组合, 于是我转而考虑 $\mathbb{Q}$ 上的线性组合, 问题迎刃而解.

对于第二问, 应该可以感受到结论是否定的, 否则没有任何手段证明. 首先, 为了保证旋转不变性, 想取 $f(x)=\mathrm{e}^{\mathbb{i}\theta(x)}$. 这里 $\mathbb{i}$ 是虚数单位, e 是自然对数的底数, $\theta(x)$ 是待定的 $\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ 的函数. 则

$$|f(x)-f(y)|=\left|\mathrm{e}^{\mathbb{i}\theta(x)}-\mathrm{e}^{\mathbb{i}\theta(y)}\right|=\left|\mathrm{e}^{\mathbb{i}(\theta(x)-\theta(y))}-1\right|.$$

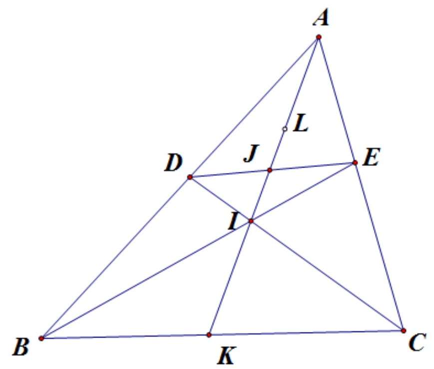
第二个等号用到了 $\theta(y)\in\mathbb{R}\implies|\mathrm{e}^{\mathbb{i}\theta(y)}|=1$.

这离我们需要的只差一点点, 只需要对 f 进行一个平移, 再取 $\theta(x)$ 满足 $\theta(x-y)=\theta(x)-\theta(y)$ 即可.

这样的 $\theta(x)$ 种类很多, 比较简单的构造方法是先找一条直线, 使 $\theta(x)$ 在这条直线上是线性的, 然后延拓到整个平面. 如取 $\theta(x)=\Re(x)$. 也可以像处理 $\mathbb{R}$ 上的柯西方程一样, 选出一组 Hamel 基, 但这并不需要. 需要注意, $\theta(x)$ 是实值函数在我们这个思路下是必要的.

二、 清华金秋营试题解析

1. 在 $\triangle ABC$ 中, 点 D,E 在边 AB,AC 上, $CD\cap BE=I$, $AI\cap DE=J$, $AI\cap BC=K$, 求 $AJ\cdot AK$ 与 AI^2 的大小关系.



答案 $AJ\cdot AK>AI^2$.

解 (刘浩宇)

设 L 为线段 AI 中点. 由完全四边形性质可知 A,I,J,K 成调和点列. 因此, $LJ\cdot LK=LI^2$. 故

$$AI^2-AJ\cdot AK=(LI+AL)^2-(LJ+AL)\cdot(LK+AL)=AL\cdot(2LI-LJ-LK)<0.$$

其中, 最后的不等号用到了 $LJ\cdot LK=LI^2$ 以及均值不等式, 等号不能成立是因

为 $LJ < \max\{LI, LA\} = LI < LK$. □

评注 熟悉调和点列性质的同学会觉得很简单.

2. 证明: 在平面上任给 n 个整点, 存在一个次数不超过 $\sqrt{2n}$ 的非零二元多项式使得这些整点都是它的零点.

证明 (杜航)

待定正整数 N. 记 $k = \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$. 记这 n 个整点为 $(x_m, y_m), m = 1, 2, \ldots, n$.

考虑多项式集合

$$U = \left\{ f(x,y) = \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \leq k}} a_{i,j} x^i y^j \middle| a_{i,j} \in \{1, 2, \ldots, N\} \right\}.$$

对每个 U 中元素 $f(x,y)$, 定义其所对应的 n 元整数组

$$(f(x_1,y_1), f(x_2,y_2), \ldots, f(x_n,y_n)).$$

为了使用抽屉原理, 我们来估计这些整数组中不同的数组的个数.

设 $M = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{1, |x_i|, |y_i|\}$.

有

$$|f(x_i,y_i)| \leq \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \leq k}} |a_{i,j} x^i y^j| \leq \sum_{\substack{i,j \geq 0 \\ i+j \leq k}} N \cdot M^k = \frac{(k+1)(k+2)M^k}{2} \cdot N.$$

则不同的 n 元整数组的个数 S 满足

$$S \leq \big((k+1)(k+2)M^k \cdot N + 1\big)^n < \big(2(k+1)(k+2)M^k \cdot N\big)^n.$$

而不同的多项式个数有 $N^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$ 个. 由于 $\frac{(k+1)(k+2)}{2} > n$, 在 N 充分大时, 有

$$\big(2(k+1)(k+2)M^k \cdot N\big)^n < N^{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}.$$

故在 N 充分大时, 必然存在不同的多项式 $f_1, f_2 \in U$, 其对应的 n 元数组相同. 这表明多项式 $f = f_1 - f_2$ 满足题设要求, 即

$$\big(f(x_1,y_1), f(x_2,y_2), \ldots, f(x_n,y_n)\big) = (0, 0, \ldots, 0).$$

结论成立. □

另证 (骆晗, 孙孟越)

在这个解答里不需要整点的条件.

记这 n 个点为 $(x_m, y_m), m = 1, 2, \dots, n$. 记 $k = \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$. 设多项式

$$f(x,y) = \sum_{\substack{i,j\ge 0\\ i+j\le k}} a_{i,j} x^i y^j.$$

将这n个整点代入, 可得关于 $a_{i,j}(i,j \ge 0, i+j \le k)$ 的齐次线性方程组

$$\begin{cases} \sum\limits_{\substack{i,j\ge 0\\ i+j\le k}} x_1^i y_1^j a_{i,j} & = 0 \\ \sum\limits_{\substack{i,j\ge 0\\ i+j\le k}} x_2^i y_2^j a_{i,j} & = 0 \\ & \vdots \\ \sum\limits_{\substack{i,j\ge 0\\ i+j\le k}} x_n^i y_n^j a_{i,j} & = 0 \end{cases}. \tag{1}$$

方程组 (1) 的未知数个数为 $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$, 大于方程个数 n. 则由克拉默法则知, (1) 一定有非零解, 这就得到一个 $f(x,y)$, 满足这 n 个点 (x_i, y_i) 都是其零点. □

评注 第二个解答对熟悉线性代数的同学而言很简单. 这个问题的可以作为线性代数的基本习题. 相信出成整点是为了给同学更多解题的空间.

3. 设正整数 $n > 1$, 证明:

$$\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2n}} - \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2n}} < \frac{1}{n^2\sqrt{1+n^2}}.$$

证明 (骆晗)

记

$$\alpha = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2n}}, \beta = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2n}}.$$

则

$$\alpha^n - \beta^n = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n} - \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \frac{1}{n\sqrt{n^2+1}}. \tag{1}$$

由均值不等式, 注意到 $\alpha\beta = 1$,

$$\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i \beta^{n-1-i} \ge n \left(\prod_{i=0}^{n-1} \alpha^i \beta^{n-1-i}\right)^{\frac{1}{n}} = n. \tag{2}$$

由于 $\alpha > 1 > \beta$, 故 (2) 的等号不能成立. (1) 除以 (2) 即知原不等式成立. □

评注 若能发现原不等式右边是左边两项 n 次方和的差的 $\frac{1}{n}$, 则问题就迎刃而解了.

4. 是否存在正整数 $n \geq 2^{2018}$, 使得不存在正整数 x, y, u, v, 满足 $u, v > 1$ 且 $n = x^u + y^v$.

解 (孙孟越)

存在. 待定正整数 $N > 2^{2018}$. 定义

$Q = \{x^u | x \in \mathbb{Z}^+, u \in \mathbb{Z}^+, u > 1, x^u \leq N\}, X = \{x^2 | x \in \mathbb{Z}^+, x^2 \leq N\}, Y = Q - X.$

为简洁, 在本解答中, 定义如下记号: 对正整数集合 A, B, 定义

$$A + B = \{a + b | a \in A, b \in B, a + b \leq N\}.$$

用反证法, 假设不存在满足题目条件的 n, 则对任意正整数 $2^{2018} \leq n \leq N$, 都可以找到 Q 中两个元素和为 n, 即 n 在 $Q + Q$ 中.

这表明 $Q + Q$ 中至少有 $N - 2^{2018}$ 个元素. 我们发现 $Q + Q$ 中每个元素必然属于 $X + X, X + Y, Y + Y$ 三者之一.

$$\begin{aligned} N - 2^{2018} &\leq |Q + Q| \leq |X + X| + |X + Y| + |Y + Y| \\ &\leq |X + X| + |X| \cdot |Y| + |Y|^2. \end{aligned} \tag{1}$$

那我们来估计 $X, Y, X + X$ 中的元素个数.

首先我们有显然的不等式

$$|X| \leq \sqrt{N}.$$

其次, 对 Y, 注意 Y 中每一个 x^u 的 x 都满足 $x \leq \sqrt[3]{N}$ (否则 $x^u \geq x^3 > N$). 而 u 满足 $u \leq \log_2 N$ (否则 $x^u \geq 2^u > N$). 故有

$$|Y| \leq \sqrt[3]{N} \log_2 N.$$

最后来考虑 $X + X$, 注意模 4 余 3 的正整数不能写为平方和, 故 $X + X$ 中至少有 $\left(\frac{N}{4} - 1\right)$ 个 $\leq N$ 的正整数不出现, 即有

$$|X + X| \leq N - \left(\frac{N}{4} - 1\right) = \frac{3N}{4} + 1.$$

故我们有

$$\begin{aligned} |Q + Q| &\leq |X + X| + |X| \cdot |Y| + |Y|^2 \\ &\leq \frac{3N}{4} + 1 + N^{5/6} \log_2 N + N^{2/3} (\log_2 N)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

(2) 右边在 N 充分大时是比 (1) 左边小的, 这导致了矛盾. □

评注 问题的核心在与 $|Q + Q|$ 的大小估计. 直接拿 $|Q|$ 来估计阶不够, 就想到了分段来估计. 事实上 $|X + X|$ 大约是 $\frac{BN}{\sqrt{\ln N}}$ 量级的 (有兴趣的读者可以参

阅 [1]*. 所以 $|Q+Q|=o(N)$. 熟悉这类问题的同学可以迎刃而解.

5. 设一个凸多边形和它的内部能被 n 个半径不必相等的圆盘完全覆盖. 证明或否定: 可以从这些圆盘中选出一些两两不交的圆盘, 使得将它们半径扩大三倍之后, 可以覆盖原凸多边形.

答案 一定可以做到.

解 (叶龙翔)

我们记圆盘按半径从大到小排列, 把这些圆盘圆心依次记为 $C_1, C_2, C_3, \cdots$, C_n, 半径依次设为 $r_1 \geq r_2 \geq \cdots \geq r_n$.

我们按如下步骤取出圆盘: 考虑所有与已取出的圆盘不相交的圆盘, 取其中半径最大者. 有限步之内操作必然结束.

下面来证明, 这组圆盘能覆盖多边形内所有点. 对多边形内任意一点 A, 设其被圆盘 C_i 覆盖.

若圆盘 C_i 被我们取出, 则 A 被覆盖了.

若圆盘 C_i 没有被我们取出, 说明存在一个与圆盘 C_i 相交的, 半径为 $\geq r_i$ 的圆盘被取出. 设为圆盘 C_j. 则 $r_j \geq r_i$. 我们有

$$|AC_j| \leq |AC_i| + |C_iC_j| \leq r_i + (r_i + r_j) \leq 3r_j.$$

故 A 被扩大了 3 倍半径的圆盘 C_j 所覆盖.

综上, 结论成立. □

评注 我们在这里使用了贪心算法, 这个题放在第一题难度很合适.

6. 对前 n 个正整数用 k 种颜色染色, 使得无法从中选出三个不同色的正整数构成等差数列. 设 k 的最大值为 $f(n)$. 证明: $\log_3 n \leq f(n) \leq 1 + \log_2 n$.

证明 (骆晗)

先证左边不等式. 记 $v_p(n)$ 为正整数 n 中质数 p 的幂次, 即最大的自然数 α 满足 $p^\alpha \mid n$.

对任意的正整数 $m \leq n$,将 m 染成第 $v_3(m)+1$ 种颜色. 这样使用了 $\lfloor \log_3 n \rfloor + 1 > \log_3 n$ 种颜色. 对于不同色的正整数 x, y, 有 $v_3(2x-y) = \min\{v_3(x), v_3(y)\}$, 故 $2x-y$ 与 x, y 之一同色. 故 $f(n) \geq \log_3 n$.

*[1] *Topics in Number Theory*, Volumes I and II, William J. LeVeque. 第 II 卷, 第 7-5 章节 (The integers representable as a sum of two squares). Dover Publications (2002)

再证右边不等式. 对 α 归纳证明 $2^\alpha \le n < 2^{\alpha+1}$ $(\alpha \in \mathbb{N})$ 时命题成立.

当 $\alpha = 0$ 时, $n = 1$, 显然成立.

假设 $\alpha - 1$ 时成立. 考虑数 $1, 2, \cdots, n$ 染上的颜色.

若其中有两种颜色不同于 $1, 2, \cdots, 2^\alpha - 1$ 所染上的颜色, 不妨设为红色和蓝色.

设最小的染上红色的数为 x, 最小的染上蓝色的数为 y. 显然 $x \neq y$, 不妨设 $x < y$. 则

$$2^\alpha \le x < y \le n < 2^{\alpha+1} \implies 2x - y > 0.$$

考虑正整数 $2x-y$, 它与异色对 (x, y) 构成等差数列, 其必定与 x, y 之一同色. 故 $2x - y$ 要么是红色, 要么是蓝色. 但 $2x - y < x < y$, 这与 x 的最小性或 y 的最小性矛盾. 故数 $1, 2, \cdots, n$ 染上的颜色至多只有一种颜色不同于 $1, 2, \cdots, 2^\alpha - 1$ 所染上的颜色. 这表明 $f(n) \le f(2^\alpha - 1) + 1 \le \alpha + 1 \le 1 + \log_2 n$. 命题对 α 成立, 故由归纳原理知, 结论成立. $\square$

评注 题目的形式提示了我们采用数学归纳法. 前半部分实际上就是利用了 $p-$adic 数的结构. 中等难度的组合题.

7. 给定正整数 n, 给定 n 个实数 $0 < p_i < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. 对 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的非空子集 I, 定义 $P_I = \prod\limits_{i \in I} p_i$, 并且 $P_\emptyset = 1$. 对任意 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的非空子集 I, 取一个实数 X_I, 再取 $X_\emptyset = 1$. 证明:

$$\sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} \sum_{J \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} \frac{X_I X_J}{P_{I \cap J}} \ge \prod_{i=1}^{n} (1 - p_i).$$

证明 (骆晗,杜航)

记全集 $U = \{1, 2, \cdots, n\}$. 我们证明:

$$\sum_{I \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} \sum_{J \subseteq \{1,2,\ldots,n\}} \frac{X_I X_J}{P_{I \cap J}} = \sum_{K \subseteq U} \left(\prod_{i \in U-K} (1 - p_i) \right) \left(\sum_{J \subseteq K} \sqrt{\frac{\prod_{i \in K-J} p_i}{\prod_{i \in J} p_i}} X_J \right)^2. \tag{1}$$

因为 $p_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 故 (1) 中的根式是有意义的.

对每一对 $I, J \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$, 计算 (1) 式右边展开式中 $X_I X_J$ 的系数.

情形 1. 若 $I \neq J$, 则 $X_I X_J$ 在右边的展开式中出现在 $I \cup J \subseteq K$ 对应的和

式中, 其系数

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{(I\cup J)\subseteq K\subseteq U}\left(\prod_{i\in U-K}(1-p_i)\right)\cdot\sqrt{\frac{\prod_{i\in K-I}p_i}{\prod_{i\in I}p_i}}\cdot\sqrt{\frac{\prod_{i\in K-J}p_i}{\prod_{i\in J}p_i}}\\
&= 2\sum_{(I\cup J)\subseteq K\subseteq U}\left(\prod_{i\in U-K}(1-p_i)\right)\cdot\frac{\prod_{i\in K-(I\cup J)}p_i}{\prod_{i\in I\cap J}p_i}\\
&= 2\frac{1}{P_{I\cap J}}\cdot\left(\sum_{(I\cup J)\subseteq K\subseteq U}\prod_{i\in U-K}(1-p_i)\cdot\prod_{i\in K-(I\cup J)}p_i\right)\\
&= 2\frac{1}{P_{I\cap J}}.
\end{aligned}
$$

最后一个等式是因为如果将 $U-(I\cup J)$ 的所有子集看成一个样本空间, 其中每个元素 $i\in U-(I\cup J)$ 出现的概率为 p_i, 不出现的概率为 $(1-p_i)$, 那么对 K $((I\cup J)\subseteq K\subseteq U)$,

$$\prod_{i\in U-K}(1-p_i)\cdot\prod_{i\in K-(I\cup J)}p_i$$

即为子集 $K-(I\cup J)$ 出现的概率(由于 $0<p_i<1$, 这是可以做到的). 这表明

$$\sum_{(I\cup J)\subseteq K\subseteq U}\prod_{i\in U-K}(1-p_i)\cdot\prod_{i\in K-(I\cup J)}p_i=1.$$

情形 2. 若 $I=J$, 则 X_I^2 的系数

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{I\subseteq K\subseteq U}\left(\prod_{i\in U-K}(1-p_i)\right)\cdot\frac{\prod_{i\in K-I}p_i}{\prod_{i\in I}p_i}\\
&= \frac{1}{P_I}\cdot\sum_{I\subseteq K\subseteq U}\left(\prod_{i\in U-K}(1-p_i)\cdot\prod_{i\in K-I}p_i\right)\\
&= \frac{1}{P_I}.
\end{aligned}
$$

最后一个等式是因为如果将 $U-I$ 的所有子集看成一个样本空间, 其中每个元素 $i\in U-I$ 出现的概率为 p_i, 不出现的概率为 $(1-p_i)$, 那么对 K $(I\subseteq K\subseteq U)$,

$$\prod_{i\in U-K}(1-p_i)\cdot\prod_{i\in K-I}p_i$$

即为子集 $K-I$ 出现的概率(由于 $0<p_i<1$, 这是可以做到的). 这表明

$$\sum_{I\subseteq K\subseteq U}\prod_{i\in U-K}(1-p_i)\cdot\prod_{i\in K-I}p_i=1.$$

结合以上两种情况即知 (1) 成立. 由于 $1-p_i\geq 0$ $(i=1,2,\ldots,n)$, 以及对

$K \subseteq U$ 有

$$\left(\sum_{J\subseteq K}\sqrt{\frac{\prod_{i\in K-J}p_i}{\prod_{i\in J}p_i}}X_J\right)^2 \geq 0.$$

知

$$(1)\ 左边 \geq \left(\prod_{i\in U}(1-p_i)\right)X_\emptyset^2 = \prod_{i\in U}(1-p_i).$$

□

评注 值得一提的是, 这个题和 2018 年中国女子数学奥林匹克第三题方法几乎一模一样. 当然, 那个题在考场上也是非常难的, 做过那个题对这个题帮助很大.

III. 总评

一、 北大金秋营

今年的题比去年简单, 每一个题都有满分的同学. 平均水平是 3.5 道, 最高的同学做了 7.5 道.

二、 清华金秋营

今年的题比去年简单. 最高的同学得了满分. 做 5 个题以上就很有竞争力了.

作者顺序按照加入团队的先后排列. 题末评注均由第一作者给出.