数学新星问题征解

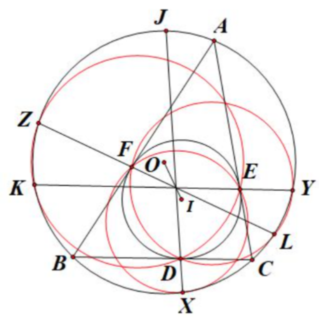
第二十八期 (2018.08)

主持: 牟晓生

第一题. 已知 Γ 为 $\triangle ABC$ 的外接圆. 圆 Ω 与 AB, AC 及圆 Γ 相切, 两圆切点为 T. I 是三角形内心, 过 I 作 BC 的平行线与 AB, AC 分别交于 D, G, 且于圆 Ω 交于两点 E, F. 设 K 为 $\triangle AIT$ 与圆 Ω 除 T 外的另一交点. 证明: $\angle DKE = \angle FKG$.

(湖南雅礼中学学生 黄金阳 供题)

第二题. 如右图, $\triangle ABC$ 内接于圆 O 且三边互不相等. J, K, L 分别为弧 $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ 的中点. 内切圆 I 与三边切于 D, E, F. 延长 JD, KE, LF 与圆 O 分别交于 X, Y, Z. 证明: $\triangle XEF, \triangle YFD, \triangle ZDE$ 的三个外接圆的根心在直线 OI 上.



(广西钦州 卢圣 供题)

第三题. 已知 $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_n \geq 0, y_1 \geq y_2 \geq \cdots y_n \geq 0$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i = n$. 证明:

$$\prod_{i=1}^{n} |x_i - y_i| < e^{\frac{n}{2}}.$$

(天津实验中学学生 解尧平 供题)

第四题. 令 $\Omega(n)$ 为正整数 n 的素因子个数(计重数), 而 $\omega(n)$ 为 n 的不同素因子个数(不计重数).

(a) 证明存在 n, 使得 $\omega(n+1) < \omega(n+2) < \cdots < \omega(n+2018)$;

(b) 证明存在 n, 使得 $\Omega(n+1) < \Omega(n+2) < \cdots < \Omega(n+2018)$.

(浙江省乐清市乐成寄宿中学学生 林子淮 谢柏庭 供题)