数节数

张瑞祥

我曾经写过一篇“多项式方法”的文章. 此方法的要点在于: 用一个辅助的多项式来获得某类几何对象 (通常排列在直线或低次代数曲线上) 的有效上界. 具体来说, 它通常涉及如下两步:

1. 假设我们要研究某个点集, 它排列在一些直线上, 则可考虑作一个多项式, 在该点集上恒为 0.

2. 利用事实“一个 d 次多项式若在一条直线上 $(d+1)$ 个点处为 0, 则它在这条直线上恒为 0”来得到有效的估计.

今天我们介绍这一方法的又一有利应用: 节 (joint) 数的上界估计.

定义 1 *在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中任给 n 条直线, 它们在点 p 处形成一个“节”, 则有 3 条给定的直线同时过 p 且不共面.*

对于节的研究, 最早见于图像处理相关文章 [1].

一个自然且有趣的问题是: *设 J 为节的集合, 那么 $|J|$ 最大是多少?*

显然的上界是 $\binom{n}{2}$, 这也是二维中类似问题的答案. 而一个容易的下界则有数量级 $n^{\frac{3}{2}}$, 它由一个约 $(\frac{1}{\sqrt{3}}n^{\frac{1}{2}}) \times (\frac{1}{\sqrt{3}}n^{\frac{1}{2}}) \times (\frac{1}{\sqrt{3}}n^{\frac{1}{2}})$ 的三维网格给出.

[1] 中已给出 $|J|$ 的一个上界估计, 证明其数量级不超过 $n^{\frac{7}{4}}$. 在 2008 年, Guth 和 Katz 在 [2] 中证明了上界也是 $n^{\frac{3}{2}}$ 数量级的, 从而在渐近意义下完全解决了这个问题. 他们的证明用到了多项式方法. 我们给出一个不同的证明, 但也将用到多项式方法.

以下证明中 C 都是正的常数, 在不同地方出现时意义不必相同.

定理 (Guth-Katz [2]) *存在常数 C, 使 $|J| \le Cn^{\frac{3}{2}}$.*

证明 我们找一个次数尽可能低的三元多项式 $Q(x,y,z) \not\equiv 0$ 在所有 $p \in J$ 上为 0. 注意到一个次数 $\le d$ 的三元多项式有 $\binom{d+3}{3} \ge \frac{1}{C} \cdot d^3$ 个独立的待定系数,

收稿日期: 2018-06-17.

而一个多项式在任一点 p 处为 0 相当于关于其系数的一个一次齐次方程. 因此当 $\frac{1}{C}d^3 \geq |J|$ 即 $d \geq C|J|^{\frac{1}{3}}$ 时, 我们可找到一个次数 $\leq d$ 的非零多项式在任意 $p \in J$ 上为 0. 以下取 $d = \lceil C|J|^{\frac{1}{3}} \rceil$, 并记找到的多项式为 $Q(x, y, z)$, 则

- $\deg Q \leq C|J|^{\frac{1}{3}}$.
- $Q(p) = 0,\ \forall\, p \in J$.

对于 $p \in J$ 和已给的直线 $p \in l$, 我们说三元组 (p, l, Q) 是"重要的", 如果我们在 p 处建立坐标系使 l 为 Z 轴方向, 则 Q 在此坐标系表达式中最低次项与 Z 相关. 否则我们称 (p, l, Q) 是"不重要的".

注意到

(a) 对任意 $p \in J$ 及 $l_1, l_2, l_3 \ni p$, 若 l_1, l_2, l_3 不共面则 p 至少关于 Q 和其中一条线是重要的. 因若不然, 可以证明 Q 在以 p 为原点的坐标系中最低次项是一个与 l_1, l_2, l_3 方向都无关的函数 (留作练习), 故只能是常数, 与 $Q(p) = 0$ 矛盾.

另外, 我们有

(b) 任一条已给直线 l 上只有 $\leq \deg Q$ 个重要的节, 即, 使 (p, l, Q) 是重要的. 为此, 以 l 为 Z 轴建立直角坐标系, 设 Q 在此坐标系下方程为 $\sum\limits_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)} P_\alpha(z) x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$.

设 $\alpha_0 = (\alpha_{0_1}, \alpha_{0_2})$ 使 $P_{\alpha_0}(2) \not\equiv 0$ 且 α_0 是使 $\alpha_{0_1} + \alpha_{0_2}$ 最小的. 则若 z 不是 p_{α_0} 的根, (p, l, Q) 一定不是重要的 (同样留作练习).

由 (a), (b), 有 $|J| \leq n \cdot \deg Q \leq Cn \cdot |J|^{\frac{1}{3}}$. 故 $|J| \leq Cn^{\frac{3}{2}}$. 证毕.

参考文献

[1] B. Chazelle, H. Edelsbmnner, L. Guibas, R. Pollack, R. Seidel, M. Sharir and J. Snoeyink, Counting and cutting cydes of lines and rods in space, Computational Geometry : Theory and Applications, 6(1992), no. 1, 305-323.

[2] L. Guth and N. Katz, Algebraic methods in discrete analogs of the Kakeya problem, Advances in Mathematics, 225(2010), no. 5, 2828-2839.