2018 USAMO 试题解答与评析

姚睿[1], 罗振华[2]

(1. 华中师范大学第一附属中学, 430223 2. 上海四季教育, 200070)

本文给出今年美国数学奥林匹克 (USAMO) 试题的解答与评析, 供有兴致的读者参考.

第 1 题 设 a, b, c 是正实数, 且满足 $a+b+c=4\sqrt[3]{abc}$, 证明:

$$2(ab+bc+ca)+4\min\{a^2,b^2,c^2\}\geq a^2+b^2+c^2.$$

证明 由对称性, 不妨设 $a=\min\{a,b,c\}$. 则原不等式等价于

$$2(ab+bc+ca)+4a^2\geq a^2+b^2+c^2.$$

两边同时加上 $2(ab+bc+ca)$, 上式等价于

$$4(ab+bc+ca)+4a^2\geq (a+b+c)^2,$$

这等价于

$$4a(a+b+c)+4bc\geq (a+b+c)^2.$$

由题设, $a+b+c=4\sqrt[3]{abc}$, 则上式等价于

$$4a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+bc\geq 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}}. \tag{$*$}$$

由均值不等式,

$$4a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}+bc\geq 2\sqrt{4a^{\frac{4}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}bc}=4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{2}{3}},$$

故 $(*)$ 式成立, 从而原不等式成立. □

评析 本题是一道简单的不等式问题. 题目条件看上去很怪异, 上面的解法通过恒等变形凑出含有 $a+b+c$ 的项, 代入题设之后发现原不等式化归为均值不等式, 从而证得了结论.

收稿日期: 2018-04-30; 修订日期: 2018-06-28.

第 2 题 求所有的函数 $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$, 使得对所有满足 $x,y,z>0$ 且 $xyz=1$ 的实数组 (x,y,z), 均有

$$f\left(x+\frac{1}{y}\right)+f\left(y+\frac{1}{z}\right)+f\left(z+\frac{1}{x}\right)=1.$$

解 注意到 $xyz=1$, 我们作代换 $x=\frac{a}{b},y=\frac{b}{c},z=\frac{c}{a}$, 其中 a,b,c 是正实数. 将其代入原方程, 得到

$$f\left(\frac{b+c}{a}\right)+f\left(\frac{c+a}{b}\right)+f\left(\frac{a+b}{c}\right)=1.$$

令 $g(x)=f\left(\frac{1}{x}-1\right)$, 由于 $f:(0,\infty)\to(0,1)$, 则 $g:(0,1)\to(0,1)$. 且有

$$\begin{aligned}&g\left(\frac{a}{a+b+c}\right)+g\left(\frac{b}{a+b+c}\right)+g\left(\frac{c}{a+b+c}\right)\\=&f\left(\frac{b+c}{a}\right)+f\left(\frac{c+a}{b}\right)+f\left(\frac{a+b}{c}\right)=1.\end{aligned}$$

注意到 $\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1$, 则问题转化为确定 $g:(0,1)\to(0,1)$ 使得

$$g(u)+g(v)+g(w)=1,\ \ u+v+w=1.$$

因此 $g\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$.

再令 $h(x)=g\left(x+\frac{1}{3}\right)-g\left(\frac{1}{3}\right)=g\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}$, 由 $g:(0,1)\to(0,1)$ 知, $h:\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\to\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, 且有

$$h(x)+h(y)+h(z)=0,\ \ x+y+z=0.$$

令 $x=y=z=0$, 得 $h(0)=0$. 令 $x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right),y=-x,z=0$, 得

$$h(-x)=-h(x),\ \ x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

这说明 h 在 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 是奇函数.

令 $x,y\in\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right),z=-(x+y)$, 得

$$h(x+y)=h(x)+h(y),\ \ x,y\in\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right).$$

令 $x=y\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right),z=-2x$, 得

$$h(-2x)=-2h(x),\ \ x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right).$$

结合 h 在 $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ 是奇函数知

$$h(2x)=2h(x),\ \ x\in\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right).$$

对任意 $x,y,x+y\in\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$, 存在正整数 n, 使得 $\frac{x}{2^n},\frac{y}{2^n},\frac{x+y}{2^n}\in\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$. 所以

$$h(x)+h(y)=2^nh\left(\frac{x}{2^n}\right)+2^nh\left(\frac{y}{2^n}\right)=2^nh\left(\frac{x}{2^n}+\frac{y}{2^n}\right)=h(x+y).$$

这样 $h(x+y)=h(x)+h(y)$ 在定义域 $\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 上均成立.

由于 h 是有界的, 则柯西方程 $h(x+y)=h(x)+h(y)$ 有如下解

$$h(x)=cx,\ c\in\mathbb{R} \text{ 是一个常数.}$$

由 $h:\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\to\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 知 $c\in\left[-\frac{1}{2},1\right]$.

结合 $g(x)=f\left(\frac{1}{x}-1\right)$ 与 $h(x)=g\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}$ 知 ,

$$f(x)=\frac{1-c}{3}+\frac{c}{x+1},\ \text{其中 } c\in\left[-\frac{1}{2},1\right].$$

可以检验, 上述函数是原方程的解.

综上可知, 所求的解为 $f(x)=\frac{1-c}{3}+\frac{c}{x+1}\left(c\in\left[-\frac{1}{2},1\right]\right)$. □

评注 这是一道形式优美且有难度的函数方程题目. 作代换 $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{b}{c}$, $z=\frac{c}{a}$ 是熟知的技巧, “消化了” 条件, 把函数方程作了初步的化简. 下面两个关键步骤是: 代换出新函数 $g(x)=f\left(\frac{1}{x}-1\right)$, 使得方程变成了规范的线性的方程; 再作代换 $h(x)=g\left(x+\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}$, 使问题的对称性得到了体现, 从而转化成了 Cauchy 方程.

第 3 题 给定整数 $n\geq 2$, $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为所有不超过 n 且与 n 互素的正整数组成的集合. 证明: 若 m 的每个素因数均为 n 的素因数, 则对任何正整数 k,有 $m\mid a_1^k+a_2^k+\cdots+a_m^k$.

证明 为方便起见, 对任意正整数 n, 令

$$A(n)=\{x\in\mathbb{Z}\mid 1\leq x\leq n,(x,n)=1\},$$

则 $|A(n)|=\varphi(n)$.

记 $S(n,k)=\sum\limits_{a\in A(n)}a^k$.

我们证明比原题更强的命题.

命题 已知 n 为不小于 2 的正整数, k 为正整数. 对于 n 的素因数 p , 有

$$\nu_p(\varphi(n))\leq\nu_p(S(n,k)),$$

这里 $\nu_p(x)$ 表示 x 中 p 的幂次.

为此需要如下两个引理.

引理 1 对于任意素数 p 与正整数 e,k,有

$$S(p^e,k)=\sum_{x\in A(p^e)}x^k\equiv 0\pmod{p^{e-1}}.$$

引理 1 的证明 对 e 用数学归纳法证明结论.

$e=1$ 时, 结论显然成立.

假设命题对 e 成立, 则

$$S(p^e,k)=\sum_{x\in A(p^e)} x^k \equiv 0 \pmod{p^{e-1}}.$$

考虑 $e+1$ 时的情况, 由于

$$A(p^{e+1})=\{a+h\cdot p^e \mid a\in A(p^e) \text{ 且 } h=0,\dots,p-1\},$$

故

$$S(p^{e+1},k)=\sum_{x\in A(p^e)}\sum_{h=0}^{p-1}(x+h\cdot p^e)^k \equiv \sum_{x\in A(p^e)}\sum_{h=0}^{p-1} x^k \equiv pS(p^e,k)\equiv 0 \pmod{p^e}.$$

所以 $e+1$ 时命题成立. 故引理 1 获证.

引理 2 对于任意素数 p 与正整数 k,t, 有 $\nu_p(1^k+\cdots+t^k)\geq \nu_p(t)-1$.

引理 2 的证明 设 $t=p^\alpha t_1$, 其中 $(p,t_1)=1$. 把 $1^k+\cdots+t^k$ 按连续 p^α 个数一组分成 t_1 组, 则每组数的第 i 项都与 i 模 p^α 同余, 由引理 1 , $p^{\alpha-1}\mid 1^k+\cdots+(p^\alpha)^k$, 故 $p^{\alpha-1}\mid 1^k+\cdots+t^k$. 引理 2 获证.

回到原题. 我们使用数学归纳法证明开始提到的命题, 对 n 的素因数个数 (计重数) α 进行归纳.

当 n 是素数的幂次时, 由引理 2, 结论成立.

假设对于素因数个数不大于 α 的所有自然数, 命题成立.

考虑 $\alpha+1$ 的情形. 对于有 $\alpha+1$ 个素因数的 n_1, 设 $n_1=nq$, 其中 q 是 n_1 的一个素因数, 那么 n 有 α 个素因数.

当 $q\nmid n$ 时, 由于 $\varphi(nq)=\varphi(n)\varphi(q)$, 故对于 n的素因数 p,

$$\nu_p(\varphi(nq))=\nu_p(\varphi(n))+\nu_p(\varphi(q))=\nu_p(\varphi(n))+\nu_p(q-1),$$

则只需说明

$$\nu_p(S(nq,k))\geq \nu_p(\varphi(n))+\nu_p(q-1).$$

注意到

$$A(nq)=\{a+nh \mid a\in A(n) \text{ 且 } h=0,\dots,q-1\}\setminus qA(n).$$

则有

$$\begin{aligned}
S(nq,k)&=\sum_{a\in A(n)}\sum_{h=0}^{q-1}(a+nh)^k-\sum_{a\in A(n)}(qa)^k\\
&=\sum_{a\in A(n)}\sum_{h=0}^{q-1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}a^{k-j}(nh)^j-q^kS(n,k)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{h=0}^{q-1}\sum_{a\in A(n)} a^{k-j}\binom{k}{j}(nh)^j - q^k S(n,k)\\
&= \sum_{j=0}^{k}\sum_{h=0}^{q-1} S(n,k-j)\binom{k}{j}n^j h^j - q^k S(n,k)\\
&= (q-q^k)S(n,k) + \sum_{j=1}^{k} S(n,k-j)\binom{k}{j}n^j\sum_{h=1}^{q-1}h^j.
\end{aligned}
$$

为了使得二项式定理成立, 这里需要补充定义$0^0=1$.

下面说明上式最后一行的两项 p 的幂次都至少为 $\nu_p(\varphi(n))+\nu_p(q-1)$. 对于第一项, 由归纳假设知 $S(n,k)$ 中 p 的幂次至少为 $\nu_p(\varphi(n))$, $q-q^k$ 为 $q-1$ 的倍数, 它所含 p 的幂次至少为 $\nu_p(q-1)$; 对于第二项, 由归纳假设知对每个 j 都有 $S(n,k-j)$ 中 p 的幂次至少为 $\nu_p(\varphi(n))$, 由引理 2, $\sum\limits_{h=1}^{q-1}h^j$ 中 p 的幂次至少为 $\nu_p(q-1)-1$, n^j 中 p 的幂次至少为1. 故上式最后一行的两项 p 的幂次都至少为 $\nu_p(\varphi(n))+\nu_p(q-1)$.

当 $q\mid n$ 时, $\varphi(nq)=q\varphi(n)$, 故对于 n 的素因数 p,

$$\nu_p(\varphi(nq))=\nu_p(\varphi(n))+\nu_p(q).$$

注意到

$$A(nq)=\{a+nh \mid a\in A(n) \text{ 且 } h=0,\ldots,q-1\}.$$

与前一种情况类似计算可得

$$S(nq,k)=qS(n,k)+\sum_{j=1}^{k}S(n,k-j)\binom{k}{j}n^j\sum_{h=1}^{q-1}h^j.$$

类似讨论可知, 上式所含 p 的幂次不小于 $\nu_p(\varphi(n))+\nu_p(q)$.

故 $\alpha+1$ 时结论成立. 这就完成了归纳证明.

综上可知, 命题获证. □

评析 这是一道比较困难的数论问题, 想法很基本不过解题过程十分繁琐. 本题的思路是先用标准分解把这个问题归结为 n 的素因数的问题, 然后再使用数学归纳法对 n 的素因数个数归纳. 归纳过渡中需要分析 $A(n)$ 的结构, 根据 $A(n)$ 的结构对 $S(n,k)$ 进行适当分拆就可以完成证明.

第 4 题 设 p 是素数, $a_1,a_2,\cdots,a_p$ 为给定的整数列, 证明: 存在一个整数 k, 使得 $a_1+k,a_2+2k,\cdots,a_p+pk$ 被 p 除时, 至少有 $\frac{p}{2}$ 个不同的余数.

证明 当 $p=2$ 时, 结论显然成立.

下面考虑 $p\geq 3$ 的情形.

作一个 p 阶完全图, 设它的顶点集为 $\{A_1, A_2, \cdots, A_p\}$, 对任意 $1 \le i < j \le p$, 我们在边 A_iA_j 上标记数 k, 这里 k 由 $0 \le k < p$, $k \equiv -\frac{a_i - a_j}{i-j} \pmod p$ 唯一确定, 其中 $\frac{1}{x}$ 表示模 p 意义下的逆.

注意到对任意 $1 \le i < j \le p$, A_iA_j 边上的数 k 满足 $a_i + ik \equiv a_j + jk \pmod p$, 而且满足这个同余方程的 k 在模 p 意义下是唯一的.

图 G 一共有 $\frac{p(p-1)}{2}$ 条边, k 只有从 0 到 $p-1$ 这 p 种取值, 由抽屉原理, 存在一个 k_0 使得图中标 k_0 的边至多 $\frac{p-1}{2}$ 条.

作 G 的子图 G_1, 其中 G_1 含有 G 的所有顶点与 G 中标 k_0 的边. 在子图 G_1 中, 我们断言若 A_iA_j 与 A_jA_l (i, j, l 互不相同) 都连有边, 则 A_iA_l 也连有边. 这是因为若 A_iA_j 连有边, 则 $a_i + k_0 i \equiv a_j + k_0 j \pmod p$, 同理 $a_j + k_0 j \equiv a_l + k_0 l \pmod p$. 则 $a_i + k_0 i \equiv a_l + k_0 l \pmod p$, 所以 A_iA_l 也连有边.

这说明 G_1 中所有连通分支都是完全图.

设 G_1 有 s 个连通分支, 第 i 个分支有 x_i 个点. 由于 G_1 至多有 $\frac{p-1}{2}$ 条边, 所以有

$$\sum_{i=1}^{s} \binom{x_i}{2} \le \frac{p-1}{2}.$$

因为 x_i 是正整数, 所以 $(x_i - 1)(x_i - 2) \ge 0$, 则

$$\frac{1}{2}(x_i^2 - x_i) \ge x_i - 1.$$

故

$$\sum_{i=1}^{s}(x_i - 1) \le \sum_{i=1}^{s} \binom{x_i}{2} \le \frac{p-1}{2}.$$

而图中共有 p 个点, 则 $\sum\limits_{i=1}^{s} x_i = p$. 那么上式可以化为

$$p - s \le \frac{p-1}{2} \Leftrightarrow s \ge \frac{p+1}{2}.$$

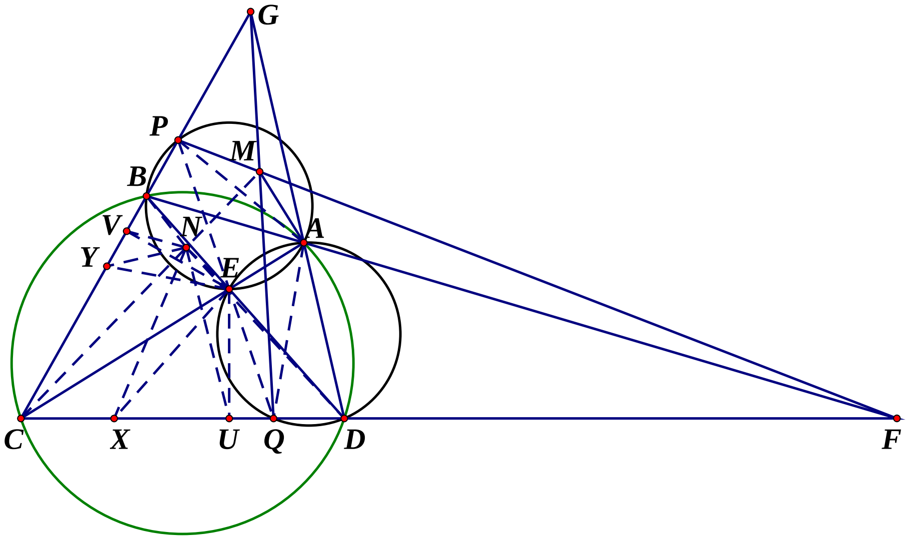
这说明 G_1 至少有 $\frac{p+1}{2}$ 个连通分支.

对于不同连通分支的点 $A_u, A_v (u \ne v)$, 有 $a_u + uk_0 \not\equiv a_v + vk_0 \pmod p$, 这就得到了 $a_i + ik_0 (i = 1, 2, \cdots, p)$ 被 p 除时至少 $\frac{p+1}{2}$ 个不同的数. 结论成立. $\square$

评析 这是一道十分漂亮的组合数论问题. 本题要做的是选取一个适当的 k, 使得 $a_i + ik (1 \le i \le p)$ 在模 p 意义下尽可能出现更多不同的数. 其中一个关键的发现是: 对于不同的 i, j, 使得 $a_i + ik$ 与 $a_i + jk$ 模 p 同余的 k 是唯一的. 由此, 可用一个图来表示这些数的联系, 转化之后的图论问题并不困难. 问题中的系数在某些时候是最佳的, 例如 $p = 5$,$a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 4, a_4 = 3, a_5 = 0$ 时,

$\frac{p+1}{2}$ 恰好可以取等号.

第 5 题 在圆内接四边形 $ABCD$ 中, 直线 AC 与 BD 交于点 E, 直线 AB 与 CD 交于点 F, 直线 BC 与 DA 交于点 G, 已知 $\triangle ABE$ 的外接圆与 BC 交于 B, P, 且 C, B, P, G 按此顺序排列, $\triangle ADE$ 的外接圆与直线 CD 相交于 D, Q, 且 C, Q, D, F 按此顺序排列. 证明: 若直线 FP 与 GQ 相交于 M, 则 $\angle MAC = 90°$.



证明 因为 A, E, B, P 四点共圆, A, E, Q, D 四点共圆. 由圆幂定理, 有

$$CQ \cdot CD = CE \cdot CA = CB \cdot CP.$$

又因为 A, B, C, D 四点共圆, 所以 $\angle ABG = \angle ADC$. 故

$$\begin{aligned}\angle AEP + \angle AEQ &= \angle ABP + 180° - \angle ADQ \\ &= 180° + (\angle ABG - \angle ADC) = 180°.\end{aligned}$$

则 P, E, Q 三点共线. 又 $\angle AQF = \angle AED = \angle APC$, 则 A, P, C, Q 四点共圆.

以 C 为圆心, $\sqrt{CQ \cdot CD}$ 为半径作反演变换. 则

$$A \to E(E \to A), Q \to D(D \to Q), P \to B(B \to P),$$

设 $F \to X, G \to Y, M \to N$. 故直线 $FP \to \triangle CXB$ 的外接圆, 直线 $GQ \to \triangle CYD$ 的外接圆, 因为 M 是直线 FP 与 GQ 的交点, 所以 N 是 $\triangle CXB$ 的外接圆与 $\triangle CYD$ 的外接圆的交点.

又因为 A, E, X, F 四点共圆, A, E, Y, G 四点共圆. 所以 $\angle EXF = \angle BAC = \angle BDC$, 故 $ED = EX$. 同理, $EB = EY$.

设 U, V 分别是线段 DX, BY 的中点. 则 $\angle EUC = \angle EVC = 90°$. 故有 C, U, E, V 四点共圆, 且 CE 为圆的直径.

又因为 N,Y,C,D 四点共圆, N,X,C,B 四点共圆. 所以

$$\angle NYB=\angle NDX, \angle NBY=\angle NXD.$$

则 $\triangle NBY\sim\triangle NXD$. 所以 $\frac{NY}{BY}=\frac{ND}{XD}$.

而 U,V 分别是 DX,BY 的中点, 所以 $\frac{NY}{YV}=\frac{ND}{DU}$. 又 $\angle NYV=\angle NDU$, 所以 $\triangle NYV\sim\triangle NDU$. 则 $\angle NVY=\angle NUD$, 这说明 C,U,N,V 四点共圆.

又 C,U,E,V 四点共圆. 所以 C,U,E,N,V 五点共圆. 注意到 CE 为圆的直径, 所以 $\angle ENC=90^\circ$. 由反演变换的保角性知, $\angle MAC=\angle ENC=90^\circ$.

综上可知, 结论成立. $\square$

评析 本题是一道有相当难度的几何题. 由于题目中出现了很多圆, 很自然想到使用反演变换. 注意到 $CQ\cdot CD=CE\cdot CA=CB\cdot CP$, 比较合理的是取 C 为反演中心, $\sqrt{CQ\cdot CD}$ 为反演半径作反演变换. 反演之后由原题转化而成的几何问题难度大大降低, 再利用相似三角形和四点共圆的性质, 可以发现 C,U,E,N,V 五点共圆 (CE 为直径), 结合反演变换的保角性可以证得原题结论.

第 6 题 考虑 $1,2,\cdots,n$ 的排列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足 $\frac{x_1}{1},\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n}$ 互不相同, 设这样的排列个数为 a_n. 证明 a_n 为奇数.

证明 我们用置换代替题设中的排列讨论问题.

记 $x_1,x_2,\ldots,x_n$ 这个排列所对应的置换为 σ.

置换 σ 称为好置换, 如果对所有 $1\le i\le n$ 都有 $\frac{\sigma(i)}{i}$ 互不相同. 对于不满足这个性质的置换称为坏置换.

先证明 σ 为好置换当且仅当 σ^{-1} 为好置换.

这里 σ^{-1} 的定义如下: $\sigma^{-1}(\sigma(i))=i(1\le i\le n)$.

当 σ 为好置换时, 对 $\forall 1\le i<j\le n$, 有 $\frac{\sigma(i)}{i}\neq\frac{\sigma(j)}{j}$. 结合 $\sigma^{-1}(i)\neq\sigma^{-1}(j)$ 知

$$\frac{\sigma^{-1}(i)}{\sigma(\sigma^{-1}(i))}\neq\frac{\sigma^{-1}(j)}{\sigma(\sigma^{-1}(j))},$$

而

$$\frac{\sigma^{-1}(i)}{i}=\frac{\sigma^{-1}(i)}{\sigma(\sigma^{-1}(i))},\frac{\sigma^{-1}(j)}{j}=\frac{\sigma^{-1}(j)}{\sigma(\sigma^{-1}(j))},$$

故

$$\frac{\sigma^{-1}(i)}{i}\neq\frac{\sigma^{-1}(j)}{j},$$

即 σ^{-1} 为好置换. 类似可证另一方面, 故上面的结论成立.

置换是由若干个互不重合的循环圈构成的, 当置换 σ 的最大循环圈长度不小于 3 时, 由于长度不小于3 的循环圈所对应的置换与它的逆不同, 此时有 $\sigma \neq \sigma^{-1}$. 我们把所有好置换中最大循环圈长度不小于 3 的置换与它的逆两两配对, 那么这些置换的总数为偶数, 去掉它们不影响奇偶性, 故只需考虑最大循环圈长度不大于 2 的好置换的个数.

称使得 $\sigma(i)=i$ 成立的 i 为 σ 的*不动点*. 则对于好置换 σ, 它的不动点至多一个 (否则存在不同的 i, j 使得 $\sigma(i)=i, \sigma(j)=j$, 那么 $\frac{\sigma(i)}{i}=\frac{\sigma(j)}{j}$, 与题设矛盾). 下面只考虑 σ 的不动点至多一个的情况, 由于 σ 最大循环圈长度不大于 2, 于是 n 为奇数时 σ 恰有 1 个不动点, n 为偶数时 σ 没有不动点. 这样的 σ 可以看作一个图, 其中 $1,2,\cdots,n$ 各表示一个点, i 与 j 连边当且仅当 (i, j) 是构成 σ 的长度为 2 的循环圈, 这种图是 K_n 的一个极大匹配 (对于给定的图 G , 如果它的子图 M 满足其中任意两条边都没有公共点, 则称 M 是图 G 的一个匹配; 如果图 G 的一个匹配 M' 满足它不是图 G 的其他匹配的真子图, 则称 M' 是图 G 的一个极大匹配).

在以上考虑范围内, 称好置换所对应的极大匹配为*好匹配*, 坏置换所对应的极大匹配为*坏匹配*. 只需证明好匹配的数目为奇数.

为了证明结论，我们需要如下引理:

引理 对于任意正整数 $n \geq 2$, 记 K_n 的极大匹配的数目为 $f(n)$, 则 $f(n)$ 为奇数.

引理的证明 当 n 是奇数时, K_n 的极大匹配恰有一个点没有连边, 这个点有 n 种选择, 剩下 $n-1$ 个点构成的子图是 K_{n-1} 的极大匹配, 故 $f(n)=n f(n-1)$.

当 n 是偶数时, K_n 的极大匹配每一个点都连有边, 取其中一个固定的点, 这点所连的边有 $n-1$ 种选择, 剩下 $n-2$ 个点所构成的子图是 K_{n-2} 的一个极大匹配, 所以 $f(n)=(n-1) f(n-2)$.

注意到 $f(2)=1$ 为奇数, n 为奇数时 $f(n)$ 与 $f(n-1)$ 奇偶性相同, n 为偶数时 $f(n)$ 与 $f(n-2)$ 相同, 用数学归纳法不难证明 $f(n)$ 为奇数.引理获证.

回到原题. 称图上顶点互不相同的两条边 (a, b) 与 (c, d) 是*相合的*, 如果 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 下面定义图上相合的边的换边操作: 若 (a, b) 与 (c, d) 是相合的两条边, 则把 (a, b) 与 (c, d) 这两条边换为 (a, c) 与 (b, d) 两条边的操作称为*换边操作*. 由 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 知 $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, 则做完换边操作之后的两组边仍然是相合的. 易知换边操作是可逆的.

我们把所有坏匹配之间的联系用图论的语言描述, 定义图 G 如下:

每一个坏匹配一一对应图 G 上的一个点, 两点之间连边当且仅当对应的两个匹配 M_1, M_2 满足如下性质:如果可以找到 M_1 的若干对顶点互不重合的相合的边, 每对边各做一次换边操作把 M_1 变为 M_2.

下面证明图 G 上每个顶点的度数为奇数.

设 M 是一个坏匹配, 我们计算在图上与它相邻的坏匹配的数目. 我们把 M 上的边 (i,j) (其中 $i<j$) 标上数 $\frac{i}{j}$, 对于所有可能的小于 1 的正有理数 q, 记 E_q 为 M 中所有标上数 q 的边组成的集合. 因为 M 是坏匹配, 所以存在 q, 使得 $|E_q| \geq 2$, 而且相合的边只能从这样的 E_q 中取出. 任取一个满足 $|E_q| \geq 2$ 的 q, 记 $k = |E_q|$, 由引理知在 E_q 中选择若干对边的数目为

$$g(q) = \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k}{2i} \cdot f(2i) \equiv \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k}{2i} \equiv 2^{k-1} \equiv 0 \pmod 2.$$

则与 M 相邻的坏匹配的数目为

$$\prod_{q,|E_q|\geq 2} g(q) - 1 \equiv 1 \pmod 2.$$

故 M 在图 G 中的度数为奇数, 由 M的任意性知图上每个顶点的度数为奇数. 而图上所有点的度数之和为边数的两倍, 这是个偶数, 从而 G 有偶数个顶点. 所以坏匹配的个数为偶数. 由引理, 总的极大匹配数目为奇数, 故好匹配的数目为奇数.

综上可知, 结论成立. □

评析 本题是一道非常困难的组合计数问题. 最大的困难在于 a_n 没有显式表达, 无法直接计算来判断奇偶性. 第一步做化简, 把置换和它的逆配对, 去掉一些数目为偶数的置换, 不影响题目讨论. 化简之后, 只剩下最大循环圈为 2 且至多 1 个不动点的置换, 这可以看作 K_n 的极大匹配. 只需证明好匹配的数目为奇数, 这里采用的手法是用图论建立坏匹配之间的联系, 发现每个顶点的度数为奇数, 这就得到了坏匹配的数目为偶数, 从而证明了结论.

感谢上海大学冷岗松教授, 华东师大二附中孙孟越仔细审阅了文章并给出了宝贵的意见.