2014 年集训队第三天第三题的若干解法

聂子佩

本文旨在探讨 2014 年国际数学奥林匹克中国国家集训队选拔考试中第三天第三题. 原题如下:

问题 设 A 是平面上一个凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的顶点构成的集合. 在 A 中每两点之间的距离的所有不同值从大到小依次记为 $d_1>d_2>\cdots>d_m>0$. 设 A 中距离为 d_i 的无序点对恰有 μ_i 对, 其中 $i=1,2,\ldots,m$. 证明: 对任意正整数 $K\le m$, 有

$$\sum_{i=1}^{K}\mu_i\le(3K-1)n.$$

这个问题取材于 [2], 在该文献中, Erdös, Lovász 和 Vesztergombi 证明了对任意正整数 $K\le m$, 存在顶点 A_i, 使得与 A_i 距离不小于 d_K 的顶点个数不多于 $3K-1$, 从而得到这个问题的答案. 这个证明也收录在《走向 IMO: 数学奥林匹克试题集锦 (2014)》中. 而在本文中, 我们将更深入地理解这个证明和该问题的若干种另解, 并给出一个新的上界.

在本文中所有凸 n 边形的顶点的下标都是模 n 意义下的.

1. 问题的出发

就像每个故事都有一个开头, 该问题的出发点是下面这个古老而优美的定理 [3]. 我们在这里给出三种不同的证明.

定理 1 $\mu_1\le n$.

证明一 对每个顶点 A_i, 若不存在与 A_i 距离等于 d_1 的顶点, 记 $S_i=\emptyset$; 否则, 记 $S_i=\{\{A_i,A_j\}\}$, 其中 j 是满足 $j>i$ 且 $|A_iA_j|=d_1$ 的最小的正整数. 我们证明任何距离为 d_1 的无序点对都属于 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}S_i$.

收稿日期: 2018-06-07; 修订日期: 2018-06-19.

反之, 设 $\{A_i, A_j\}$ 不属于 $S_i \cup S_j$ 且 $|A_iA_j| = d_1$. 由定义, 存在正整数 k, l 使得 $|A_iA_k| = |A_jA_l| = d_1$, 且 $A_iA_kA_jA_l$ 是凸四边形. 由于

$$|A_kA_l| > |A_iA_k| + |A_jA_l| - |A_iA_j| = d_1,$$

矛盾. 故而有

$$\mu_1 = \left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| \le \sum_{i=1}^{n} |S_i| \le n. \qquad \square$$

证明二 对 $i = 1, 2, \ldots, n$, 记 S_i 为所有满足 $|A_jA_k| = d_1$ 且 $j + k = i$ 的无序点对 $\{A_j, A_k\}$ 的集合. 我们证明 $|S_i| \le 1$.

反之, 由定义, 存在整数 j, k, s, t 使得 $|A_jA_k| = |A_sA_t| = d_1$, 且 $A_jA_kA_sA_t$ 是凸四边形. 由于

$$|A_jA_s| + |A_kA_t| > |A_jA_k| + |A_sA_t| = 2d_1,$$

矛盾. 故而有

$$\mu_1 = \left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |S_i| \le n. \qquad \square$$

证明三 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, 成立. 假设定理对 $n - 1$ 成立, 现在考虑 n 的情形.

若对每个顶点 A_i, 与 A_i 距离等于 d_1 的顶点个数都不多于 2, 则由握手引理, 定理成立. 反之, 则存在一个顶点 A_i 与至少三个顶点的距离都等于 d_1, 设它们为 A_j, A_k, A_s, 且 $A_iA_jA_kA_s$ 为凸四边形. 我们证明与 A_k 距离等于 d_1 的顶点个数不多于 1.

反之, 设 $|A_kA_t| = d_1$ 且 $A_i \ne A_t$, 则 $A_iA_tA_kA_s$ 为凸四边形或者 $A_iA_jA_kA_t$ 为凸四边形. 在前一种情形下, 由于

$$|A_tA_s| > |A_iA_s| + |A_tA_k| - |A_iA_k| = d_1,$$

矛盾. 在后一种情形下, 由于

$$|A_jA_t| > |A_iA_j| + |A_kA_t| - |A_iA_k| = d_1,$$

矛盾. 故而, 我们可以通过删去顶点 A_k 并利用归纳假设得到结论. $\square$

2. 行之有效的技巧

定理 1 与我们的问题之间还有一些差距, 所以我们还需要一些可以用来推进证明的小想法. 第一个想法是这样的:

命题 1 给定不超过 n 的正整数 i, j, 若对所有满足 $i < k < j$ 的正整数 k 都有 $\angle A_i A_k A_j$ 不是锐角, 则有

$$|A_i A_{i+1}| < |A_i A_{i+2}| < \cdots < |A_i A_j|.$$

证明 反之, 若 $|A_i A_k| \geq |A_i A_{k+1}|$, 则 $\angle A_i A_k A_{k+1}$ 是锐角, 而 $\angle A_i A_k A_j$ 不是锐角, 矛盾. □

在历史上, 命题 1 可以证明如下定理 [5].

定理 2 存在顶点 A_i, 使得 A_i 与其它顶点之间的距离中至少有 $\frac{n}{3}$ 个不同的值.

证明 取覆盖整个凸 n 边形的最小的圆盘 D.

若 D 的边界上只有两个顶点, 那么任何其它顶点都对这两个顶点张成钝角. 设这两个顶点之一为 A_i, 由命题 1, A_i 与其它顶点之间的距离中至少有 $\frac{n}{2}$ 个不同的值.

若 D 的边界上至少有三个顶点, 取 D 的边界上的顶点构成的凸形的一个三角剖分, 则其中必有一个小三角形的内部或边界上有 D 的圆心. 换句话说, 这是个锐角或直角三角形, 任何其它顶点都对这三个顶点中的某两个张成直角或钝角. 故存在这三个顶点中的某两个, 使得至少 $\frac{n}{3} - 1$ 个顶点对它们张成直角或钝角. 设这两个顶点之一为 A_i, 由命题 1, A_i 与其它顶点之间的距离中至少有 $\frac{n}{3}$ 个不同的值. □

虽然定理 2 与本文的主要问题之间没有直接的联系, 但它本身也是很有趣的.

我们的第二个想法是对顶点组成的等腰三角形算两次. 下面这个定理是该想法的一个应用 [1].

定理 3 设 P 是平面点集, 任意三点不共线. 那么存在点 $p \in P$, 使得 p 与 P 中其它的点之间的距离中至少有 $\frac{n-1}{3}$ 个不同的值.

证明 记 I 为 P 中的点组成的等腰三角形的个数, 其中每个正三角形被记三次.

一方面, 从等腰三角形的底边开始计算, 由于任意三点不共线, 每条底边至多对应两个顶点, 故有

$$I \leq 2\binom{n}{2} = n(n-1).$$

另一方面, 从等腰三角形的顶点开始计算, 若每个点 $p \in P$ 与 P 中其它的点之间的距离中至多有 k 个不同的值, 由柯西不等式, 每个顶点至多对应 $\frac{(n-1)(n-k-1)}{2k}$ 条底边, 故有

$$I \geq n(n-1)\frac{n-k-1}{2k}.$$

当 $k < \frac{n-1}{3}$ 时产生矛盾, 故结论成立. □

我们可以看到, 定理 2 与定理 3 之间的条件的差别只是把凸性放宽到任意三点不共线, 结论也只是相差 $\frac{1}{3}$, 但证明方法却大相径庭. 和定理 2 一样, 定理 3 与本文的主要问题之间也没有直接的联系.

我们的第三个想法是这样的:

命题 2 设 A_i, A_j, A_k, A_l 满足 $i < j < k < l < i + n$, 那么以下四者中至少有一项成立:

- $|A_iA_{l-1}| > |A_iA_l|$;
- $|A_jA_{k+1}| > |A_jA_k|$;
- $|A_{i+1}A_l| > |A_iA_l|$;
- $|A_{j-1}A_k| > |A_jA_k|$;

证明 若第一项不成立, 则 $\angle A_kA_lA_i$ 是锐角. 若第二项不成立, 则 $\angle A_jA_kA_l$ 是锐角. 若第三项不成立, 则 $\angle A_lA_iA_j$ 是锐角. 若第四项不成立, 则 $\angle A_iA_jA_k$ 是锐角. 若四项全不成立, 则凸四边形 $A_iA_jA_kA_l$ 的内角和小于 2π, 矛盾. □

我们可以从命题 2 推出下述结果 [4].

命题 3 设 A_i, A_j, A_k, A_l 满足 $i < j < k < l < i + n$, 且 $|A_iA_l| = d_s$, $|A_jA_k| = d_t$. 那么

$$\min\{j-i, l-k\} \leq s + t - 2.$$

证明 对 $s + t$ 归纳. 当 $s = t = 1$ 时, 由命题 2, 结论成立. 假设结论对 $s + t - 1$ 成立, 现在考虑 $s + t$ 的情况. 由命题 2, 我们可以用 $i + 1$, $j - 1$, $k + 1$ 或者 $l - 1$ 来替代 i, j, k 或者 l, 并利用归纳假设得到结论. □

3. 不同的结果

我们介绍对本文主要问题的几种处理方法. 有趣的是, 它们得到的结果并不完全相同.

我们首先考虑证明一, 该证明立足于定理 1 的解法一和上一节中的前两个想法. 我们将得到如下命题:

命题 4 对任意正整数 $2 \le K \le m$, 有

$$\sum_{i=1}^{K} \mu_i \le (3K-3)n.$$

证明（一） 对每个顶点 A_i, 若与 A_i 距离大于等于 d_K 的顶点的个数不多于 $3K-3$, 记

$$S_i = \{\{A_i, A_j\} : |A_iA_j| \ge d_K\};$$

否则, 记

$$S_i = \{\{A_i, A_j\} : j \text{ 取满足 } j > i \text{ 且 } |A_iA_j| \ge d_K \text{ 的最小的 } 3K-3 \text{ 个正整数}\}.$$

我们证明任何距离大于等于 d_K 的无序点对都属于 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$.

反之, 设 $\{A_i, A_j\}$ 不属于 $S_i \cup S_j$ 且 $|A_iA_j| \ge d_K$, 其中 $i < j < i+n$. 由定义, 存在两两不同的整数 k_t, l_s $(1 \le t, s \le 3K-3)$ 使得 $i < k_t < j$, $j < l_s < i+n$, 且 $|A_iA_{k_t}| \ge d_K$, $|A_jA_{l_s}| \ge d_K$.

由命题 1, 至多有 $K-1$ 个顶点 A_{k_t} 和 $K-1$ 个顶点 A_{l_s} 对 A_iA_j 张成直角或钝角. 故不妨设对 $1 \le t, s \le 2K-2$, 顶点 A_{k_t} 和 A_{l_s} 都对 A_iA_j 张成锐角.

我们证明, 对 $1 \le t, s \le 2K-2$, 有 $|A_{k_t}A_{l_s}| > d_K$. 不然的话, 由

$$|A_{k_t}A_{l_s}| \le d_K \le |A_iA_{k_t}|,$$

我们得到 $\angle A_{l_s}A_iA_{k_t}$ 是锐角, 由

$$|A_{k_t}A_{l_s}| \le d_K \le |A_jA_{l_s}|,$$

我们得到 $\angle A_{k_t}A_jA_{l_s}$ 是锐角. 由于凸四边形 $A_iA_{k_t}A_jA_{l_s}$ 的四个内角均是锐角, 矛盾.

记 I 为以两个 A_{k_t} $(1 \le t \le 2K-2)$ 为底边端点, 以 A_{l_s} $(1 \le s \le 2K-2)$ 为顶点的等腰三角形的个数.

一方面, 从底边开始计算, 我们得到

$$I \le \binom{2K-2}{2} = (K-1)(2K-3).$$

另一方面, 从顶点开始计算, 由于每个 A_{l_s} $(1 \le s \le 2K-2)$ 与每个 A_{k_t} $(1 \le t \le 2K-2)$ 之间的距离至多只有 $K-1$ 个取值, 故每个顶点至少对应 $K-1$ 个等腰三角形, 我们得到

$$I \ge 2(K-1)^2,$$

由于 $K \geq 2$, 矛盾.

故而有

$$\sum_{i=1}^{K} \mu_i = \left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |S_i| \leq (3K-3)n. \qquad \square$$

接下来, 我们考虑证明二和证明三, 其中证明二立足于定理 1 的解法一和命题 3, 而证明三立足于定理 1 的解法二和命题 3. 这两种证明可以得到相同的结果, 这并不是一种巧合, 而是这是仅利用命题 3 可以得到的最佳的结果. 证明三可见于 [4].

命题 5 对任意正整数 $K \leq m$, 有

$$\sum_{i=1}^{K} \mu_i \leq (2K-1)n.$$

证明(二) 对每个顶点 A_i, 若与 A_i 距离大于等于 d_K 的顶点的个数不多于 $2K-1$, 记

$$S_i = \{\{A_i, A_j\} : |A_iA_j| \geq d_K\};$$

否则, 记

$$S_i = \{\{A_i, A_j\} : j \text{ 取满足} j > i \text{ 且 } |A_iA_j| \geq d_K \text{ 的最小的 } 2K-1 \text{ 个正整数}\}.$$

我们证明任何距离大于等于 d_K 的无序点对都属于 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} S_i$.

反之, 设 $\{A_i, A_j\}$ 不属于 $S_i \cup S_j$ 且 $|A_iA_j| \geq d_K$, 其中 $i < j < i+n$. 由定义, 存在整数 k, l 使得 $i < k \leq j-2K+1$, $j < l \leq i+n-2K+1$, 且 $|A_iA_k| \geq d_K$, $|A_jA_l| \geq d_K$. 对 A_k, A_j, A_l, A_i 利用命题 3, 得到矛盾.

故而有

$$\sum_{i=1}^{K} \mu_i = \left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |S_i| \leq (2K-1)n. \qquad \square$$

证明(三) 对 $i = 1, 2, \ldots, n$, 记 S_i 为所有满足 $|A_jA_k| \geq d_K$ 且 $j+k=i$ 的无序点对 $\{A_j, A_k\}$ 的集合. 我们证明 $|S_i| \leq 2K-1$.

反之, 若存在 i, 使得 $|S_i| \geq 2K$, 由定义, 存在整数 j, k, s, t 使得 $j < s < t < k < j+n$, $j+k = s+t = i$, $|A_jA_k| \geq d_K$, $|A_sA_t| \geq d_K$, 且 $s-j = k-t \geq 2K-1$. 对 A_j, A_s, A_t, A_k 利用命题 3, 得到矛盾.

故而有

$$\sum_{i=1}^{K} \mu_i = \left|\bigcup_{i=1}^{n} S_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |S_i| \leq (2K-1)n. \qquad \square$$

最后, 我们要考虑的证明四其实严格来说还算不上对本文主要问题的证明, 因为它的结论和原题还差了一个常倍数, 但我们任性地将它与其它证明一视同仁. 证明四立足于定理 1 的解法三和命题 3.

我们注意到命题 3 意味着两条距离大于等于 d_K 的弦不能相距过远. 而根据定理 1 的解法三, 即归纳法, 我们希望找出一个顶点, 使得从这个顶点引出的两条距离大于等于 d_K 的弦也不能相距过远.

命题 6 *存在顶点 A_i, 使得对任意整数 j, k, 若有 $i < j < k < i+n$, 且 $|A_iA_j| \geq d_K$, $|A_iA_k| \geq d_K$, 则有 $k - j \leq 4K - 3$.*

证明 反之, 假设不存在这样的顶点. 对顶点 A_0, 设整数 j, k, 满足 $0 < j < k < n$, $|A_0A_j| \geq d_K$, $|A_0A_k| \geq d_K$, 且 $k - j \geq 4K - 2$.

对整数 l 满足 $j + 2K - n \leq l \leq -2K + 1$, 对 $A_l, A_0, A_j, A_{j+2K-1}$ 利用命题 3, 得到 $|A_lA_{j+2K-1}| < d_K$. 对整数 l 满足 $2K - 1 \leq l \leq j + 2K - 2$, 对 $A_0, A_l, A_{j+2K-1}, A_k$ 利用命题 3, 得到 $|A_lA_{j+2K-1}| < d_K$. 故而, 顶点 A_{j+2K-1} 满足结论. □

命题 7 *对任意正整数 $K \leq m$, 有*

$$\sum_{i=1}^{K} \mu_i \leq (4K-2)n.$$

证明（四） 对 n 归纳, 当 $n = 0$ 时结论成立. 假设结论对 $n-1$ 成立. 由命题 6, 存在一个顶点 A_i 与至多 $4K-2$ 个顶点距离大于等于 d_K. 我们可以通过删去顶点 A_i 并利用归纳假设得到结论. □

4. 第二次剥削

为了改进证明四中的系数使之成为对原题的一个真正的证明, 我们需要对命题 3 第二次剥削. 事实上, 我们可以得到如下结论.

命题 8 *设 A_i, A_j, A_k, A_l 满足 $i < j < k < l < i+n$. 那么存在顶点 A_x, 满足 $i \leq x \leq j$, 使得*

$$|A_iA_l| < |A_{i+1}A_l| < \cdots < |A_xA_l|$$

且

$$|A_jA_k| < |A_{j-1}A_k| < \cdots < |A_xA_k|,$$

或者存在顶点 A_y, 满足 $k \leq y \leq l$, 使得

$$|A_iA_l| < |A_iA_{l-1}| < \cdots < |A_iA_y|$$

且

$$|A_jA_k| < |A_jA_{k+1}| < \cdots < |A_jA_y|.$$

证明 对 $-i+j-k+l$ 归纳. 当 $j-i=l-k=1$ 时, 由命题 2, 结论成立. 假设结论对 $-i+j-k+l-1$ 成立, 现在考虑 $-i+j-k+l$ 的情况. 由命题 2, 我们可以用 A_{i+1}, A_{j-1}, A_{k+1} 或者 A_{l-1} 来替代 A_i, A_j, A_k 或者 A_l, 并利用归纳假设得到结论. 这里我们用到, 如果

$$|A_iA_{l-1}| < |A_{i+1}A_{l-1}| < \cdots < |A_xA_{l-1}|,$$

那么

$$|A_iA_l| < |A_{i+1}A_l| < \cdots < |A_xA_l|,$$

其余三种情况也是类似的. □

根据命题 8 我们可以推得命题 3 和下面这个命题.

命题 9 设 A_i, A_j, A_k, A_l 满足 $i < j < k < l < i+n$, 且 $|A_iA_l| = d_s$, $|A_jA_k| = d_t$. 如果 $|A_jA_k| \geq |A_jA_{k+1}|$, 那么

$$\min\{j-i, l-k+t-1\} \leq s+t-2.$$

证明 对 A_i, A_j, A_k, A_l 利用命题 8. 若第一种情况成立, 则 $s \geq x-i+1$ 且 $t \geq j-x+1$, 故 $j-i \leq s+t-2$. 若第二种情况成立, 则 $y=k$, 于是 $s \geq= l-y+1 = l-k+1$, 故 $l-k+t-1 \leq s+t-2$. □

通过命题 9, 我们可以将命题 6 改进到如下形式, 从而得到证明五. 具体地说, 在命题 6 的证明中, 我们用命题 9 代替其中一次命题 3, 用弦端点的下标差的极小性代替其中另一次命题 3. 证明五可见于 1 或者《走向 IMO: 数学奥林匹克试题集锦 (2014)》.

命题 10 存在顶点 A_i, 使得对任意整数 j, k, 若有 $i < j < k < i+n$, 且 $|A_iA_j| \geq d_K$, $|A_iA_k| \geq d_K$, 则有 $k-j \leq 3K-2$.

证明 记 k 为满足 $|A_iA_j| \geq d_K$ 的下标差 $|i-j|$ 的最小值. 不妨设 $|A_0A_k| \geq d_K$. 设 k' 是最大的整数, 使得 $|A_0A_k| < |A_0A_{k+1}| < \cdots < |A_0A_{k'}|$. 那么我们有 $|A_0A_k| \geq d_{K-k'+k}$.

对整数 l 满足 $k'+K-n+1 \le l \le -2K+k'-k+1$, 对 $A_l, A_0, A_{k'}, A_{k'+K}$ 利用命题 9, 得到 $|A_lA_{k'+K}| < d_K$. 对整数 l 满足 $k'+K-k+1 \le l \le k'+K-1$, 由于下标差小于 k, 我们得到 $|A_lA_{k'+K}| < d_K$. 故而, 顶点 $A_{k'+K}$ 满足结论. □

命题 11 对任意正整数 $K \le m$, 有

$$\sum_{i=1}^{K} \mu_i \le (3K-1)n.$$

证明（五） 对 n 归纳, 当 $n=0$ 时结论成立. 假设结论对 $n-1$ 成立. 由命题 10, 存在一个顶点 A_i 与至多 $3K-1$ 个顶点距离大于等于 d_K. 我们可以通过删去顶点 A_i 并利用归纳假设得到结论. □

对于这个竞赛题而言, 相比起上一节的四个证明, 证明五和定理 1 的常见解法相差是最大的, 而其需要的思维长度也不短, 所以这个标准答案既不自然也不简洁. 如果一个人不受其它文章的影响独立解这个题, 在得出前四个证明之一之前首先得出了证明五, 在我看来, 是舍近求远到了匪夷所思的地步.

有人可能以为, 解出初等难题靠的是灵光一闪或者幸运值之类的东西, 但这不是事实. 解出一道难题, 无论初等与否, 靠的是通过不断探索对已知结论的推广和对过分推广的反例来深刻地理解这个题目. 这个探索过程越长, 证明也就越深刻越有趣.

最后, 我们给出一个新结果, 这里的系数 $\frac{99}{52} \approx 1.904$ 比已知的最好的系数 2 [4] 更接近猜想的系数 1 [2]. 该结果, 即证明六, 立足于定理 1 的解法二, 第二节的第二个想法和第三个想法, 以及命题 8.

首先, 我们来证明如下命题.

命题 12 对于顶点 $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{i+\lceil\frac{3}{4}K\rceil}$, 至多存在 $\frac{3}{8}K$ 个顶点 A_j, 使得

$$\left|A_{i+\lceil\frac{3}{4}K\rceil}A_j\right| > \cdots > |A_{i+2}A_j| > |A_{i+1}A_j| \ge d_{K-1}.$$

证明 记 S 为这样的顶点 A_j 的集合. 记 I 为以 S 中的两个顶点为底边端点, 以 A_{i+k} $(1 \le k \le \lceil\frac{3}{4}K\rceil)$ 之一为顶点的等腰三角形的个数.

一方面, 从底边开始计算, 我们得到

$$I \le \binom{|S|}{2} = \frac{|S|}{2}(|S|-1).$$

另一方面, 从顶点开始计算, 由于每个固定的顶点 A_{i+k} $(1 \le k \le \lceil\frac{3}{4}K\rceil)$ 与 S 中的顶点之间的距离至多只有 $K-\lceil\frac{3}{4}K\rceil$ 个取值, 由柯西不等式, 我们可以得

到
$$I \geq \frac{|S|}{2}\left\lceil\frac{3}{4}K\right\rceil\left(\frac{|S|}{K-\lceil\frac{3}{4}K\rceil}-1\right) \geq \frac{|S|}{2}\left(3|S|-\frac{3}{4}K-1\right).$$

所以 $|S| \leq \frac{3}{8}K$. □

对 $i=1,2,\ldots,n$, 记 S_i 为所有满足 $|A_jA_k| \geq d_K$ 且 $j+k=i$ 的无序点对 $\{A_j,A_k\}$ 的集合. 由证明三, 我们知道 $|S_i| \leq 2K-1$.

现在我们来证明一个局部不等式.

命题 13 假设整数 j,k,k' 满足 $j<k<k'-\lceil\frac{3}{4}K\rceil+1 \leq k' < j+n$ 且
$$|A_jA_{k'}| > \cdots > |A_jA_{k+1}| > |A_jA_k| \geq d_K,$$
那么
$$\sum_{i=1}^{4}\left|S_{j+k+i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\right| \leq \frac{99}{8}K-5k'+5k-5.$$

证明 不妨设 $j=-k$. 由定义 $|A_{-k}A_{k'}| \geq d_{K-k'+k}$.

对 $i=1,2,3,4$, 令
$$T_i=\left\{\left\{A_l,A_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor-l}\right\}: k \leq l \leq k'-\left\lceil\frac{3}{4}K\right\rceil, l > i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor-l\right\}.$$
由于
$$k'-\left\lceil\frac{3}{4}K\right\rceil-k+1 \leq K-\left\lceil\frac{3}{4}K\right\rceil=\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor,$$
我们知道这些 $i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor-l$ 两两不同. 对任何
$$\left\{A_l,A_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor-l}\right\} \in S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\cap T_i,$$
由于
$$-k \leq i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor-l < l \leq k'-\left\lceil\frac{3}{4}K\right\rceil$$
且 $\left|A_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor-l}A_l\right| \geq d_K$, 我们有
$$\left|A_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor-l}A_{k'}\right| > \left|A_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor-l}A_{k'-1}\right| > \cdots > \left|A_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor-l}A_{k'-\lceil\frac{3}{4}K\rceil+1}\right| \geq d_{K-1}.$$
由命题 12, 我们得到
$$\sum_{i=1}^{4}\left|S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\cap T_i\right| \leq \frac{3}{8}K.$$

对 $i=1,2,3,4$, 令
$$T_i'=\left\{\left\{A_l,A_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor-l}\right\}: k > l > i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor-l\right\}.$$

如果 $S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\cap T_i'$ 与 $S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\backslash(T_i\cup T_i')$ 均非空, 我们取出使 l 尽可能大和尽可能小的两个无序点对 $\left\{A_l, A_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor-l}\right\}\in S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}$, 其中 $l>i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor-l>l-n$. 对这四个顶点利用命题 3, 得到

$$\left|S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\backslash T_i\right|\le 2K-k'+k-2+\left\lceil\frac{3}{4}K\right\rceil.$$

若 $S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\backslash(T_i\cup T_i')$ 是空集, 取出使 l 尽可能小的无序点对 $\left\{A_l, A_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor-l}\right\}\in S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}$, 其中$l>i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor-l>l-n$. 对这两个顶点以及 $A_{-k}, A_{k'}$ 利用命题 3, 得到

$$\begin{aligned}\left|S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\backslash T_i\right|&\le \min\left\{0, k-\min\left\{k', i\left\lceil\frac{1}{4}K\right\rceil+k\right\}+(2K-k'+k-2)\right\}\\&\le 2K-k'+k-2.\end{aligned}$$

如果 $S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\cap T_i'$ 是空集, 我们取出使 l 尽可能大的无序点对 $\left\{A_l, A_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor-l}\right\}\in S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}$, 其中 $l>i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor-l>l-n$. 对这两个顶点以及 $A_{-k}, A_{k'}$ 利用命题 3, 得到

$$\begin{aligned}\left|S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\backslash T_i\right|&\le \max\left\{k', i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor+k\right\}+(2K-k'+k-2)-\left(k'-\left\lceil\frac{3}{4}K\right\rceil\right)\\&=\max\left\{0, i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor+k-k'\right\}+2K-k'+k-2+\left\lceil\frac{3}{4}K\right\rceil\\&\le\begin{cases}2K-k'+k-2+\lceil\frac{3}{4}K\rceil & \text{, 当 } i=1,2,3 \text{ 时},\\ 3K-2k'+2k-2+\lceil\frac{3}{4}K\rceil & \text{, 当 } i=4 \text{ 时}.\end{cases}\end{aligned}$$

我们可以看到在第三种情况下得到的界是最弱的. 所以我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{4}\left|S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\right|&\le\sum_{i=1}^{4}\left|S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\backslash T_i\right|+\sum_{i=1}^{4}\left|S_{i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\cap T_i\right|\\&\le 9K-5k'+5k-8+4\left\lceil\frac{3}{4}K\right\rceil+\frac{3}{8}K\\&\le\frac{99}{8}K-5k'+5k-5.\quad\square\end{aligned}$$

我们使用两次命题 13 来拼凑出另一个局部不等式.

命题 14 对任意整数 j, 我们有

$$4|S_j|+\sum_{i=-4}^{4}\left|S_{j+i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\right|\le\frac{99}{4}K.$$

证明 不妨设 $j=0$. 若 S_0 的元素个数不大于 $\frac{7}{4}K+1$, 那么

$$4|S_j|+\sum_{i=-4}^{4}\left|S_{j+i\lfloor\frac{1}{4}K\rfloor}\right|\le 5\left(\frac{7}{4}K+1\right)+8(2K-1)<\frac{99}{4}K.$$

现在假设 S_0 的元素个数大于 $\frac{7}{4}K+1$.

令 $\{A_k, A_{-k}\}$ 和 $\{A_{k''}, A_{-k''}\}$ 是 S_0 中使 k 最小而 k'' 最大的两个元素, 这里 $0<k<k''<\frac{n}{2}$, 那么 $\frac{7}{4}K+1<|S_0|\leq k''-k+1$. 由命题 8 及对称性, 不妨设整数 k' 满足 $k\leq k'\leq k''$, 且

$$d_K \leq |A_{-k}A_k| < |A_{-k}A_{k+1}| < \cdots < |A_{-k}A_{k'}|,$$

以及

$$d_K \leq |A_{-k''}A_{k''}| < |A_{-k''}A_{k''+1}| < \cdots < |A_{-k''}A_{k'}|.$$

由于$k''-k'\leq K-1$, 我们有$k'-k>\frac{3}{4}K+1$, 由命题 13, 我们有

$$\sum_{i=1}^{4}\left|S_{i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor}\right| \leq \frac{99}{8}K-5k'+5k-5.$$

对称地, 由命题 13, 我们有

$$\sum_{i=1}^{4}\left|S_{-i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor}\right| \leq \frac{99}{8}K-5k''+5k'-5.$$

所以有

$$\begin{aligned}
&4|S_0|+\sum_{i=-4}^{4}\left|S_{i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor}\right| \\
&=5|S_0|+\sum_{i=1}^{4}\left|S_{i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor}\right|+\sum_{i=1}^{4}\left|S_{-i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor}\right| \\
&\leq 5(k''-k+1)+\left(\frac{99}{8}K-5k'+5k-5\right)+\left(\frac{99}{8}K-5k''+5k'-5\right) \\
&=\frac{99}{4}K-5. \qquad \square
\end{aligned}$$

累加这些局部不等式, 我们得到证明六.

命题 15 对任意正整数 $K\leq m$, 有

$$\sum_{i=1}^{K}\mu_i \leq \frac{99}{52}Kn.$$

证明（六） 由命题 14, 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{K}\mu_i = \left|\bigcup_{j=1}^{n}S_j\right| &\leq \sum_{j=1}^{n}|S_j| \\
&=\frac{1}{13}\sum_{j=1}^{n}\left(4|S_j|+\sum_{i=-4}^{4}\left|S_{j+i\left\lfloor\frac{1}{4}K\right\rfloor}\right|\right) \\
&\leq \frac{99}{52}Kn. \qquad \square
\end{aligned}$$

参考文献

[1] Erdös, P., On some problems of elementary and combinatorial geometry. Annali di Matematica pura ed applicata, 103.1 (1975): 99-108.

[2] Erdös, P., Lovász, L. and Vesztergombi, K. On the graph of large distances. Discrete & Computational Geometry, 4.6 (1989): 541-549.

[3] Hopf, H. and Pannwitz E. Aufgabe Nr. 167. Jahresbericht Deutsch. Math.-Verein. 43 (1934): 114.

[4] Morić, F. and Pritchard, D. Counting large distances in convex polygons: a computational approach. Thirty Essays on Geometric Graph Theory. Springer, New York, NY, 2013. 415-428.

[5] Moser, L. On the different distances determined by n points. The American Mathematical Monthly, 59.2 (1952): 85-91.