整点凸多边形最小面积的一个估计

谭健翔

(华南师范大学附属中学, 510630)

1. 引言

在去年 7 月份的新星夏 - 营中, 冯跃峰老师提出　一个思考题: 一个整点凸 N 边形内部及边界上至少有多少个整点?

显然我们可以不妨设该凸 N 边形的边上无除顶点外的整点; 再由 Pick 定理, 问题转化为"求整点凸 N 边形面积的最小可能值".

当时笔者作　一些思考, 得到　一个下界并确定　答案关于 N 的阶. 之后这个问题便一直被遗忘　, 直到最近又重新翻出来, 又运用一些和数 Ø 有关的手段构造　一个不太平凡的上界.

方便起见, 如无特别声明, 规定本文所述的凸形均是紧的. 对于关于 n 的函数 h_1, h_2, h_3, 我们记 $h_1(n) = h_2(n) + \mathcal{O}(h_3(n))$, 如果存在与 n 无关的常数 δ, ÷足 $|h_1(n) - h_2(n)| \leq \delta \cdot h_3(n)$ 恒成立.

2. 一个初步的估计

命题 1 记整点凸 N 边形面积的最小值为 $f(N)$, 那么

$$\frac{1}{192}N^3 + \mathcal{O}(N^2) \leq f(N) \leq \frac{1}{48}N^3 + \mathcal{O}(N^2).$$

证明 笔者偶然在中等数学上看到　一道相关题目, 该题要求证明 $f(N)$ 的数量级是 $\mathcal{O}(N^3)$, 对参考答案进行优化后可以得到本命题中的下界. 我们只需考察 N 为偶数的情况, 记 $N = 2m$, 我们有以下两个引理.

引理 1 存在面积为 $f(N)$ 的中心对称的凸 N 边形.

证明 反证法. 假设 $P_1P_2\cdots P_{2m}$ 是一个面积为 $f(N)$ 的凸 N 边形. 连接 P_iP_{i+m} 把该凸 N 边形划分成两部分, 其中面积较小者记为 $\mathcal{K}$; 如果 P_i 和 P_{i+m}

收稿日期: 2018-05-27; 修订日期: 2018-06-15.

在 $\mathcal{K}$ 中的内角之和 $<\pi$, 那么将 $\mathcal{K}$ 关于 P_iP_{i+m} 中点作反射后得到 $\mathcal{K}'$,$\mathcal{K}\cup\mathcal{K}'$ 是面积不大于 $f(N)$ 的整点凸 N 边形, 矛盾.

记 $\alpha_i=\angle P_{i-1}P_iP_{i+m},\beta_i=\angle P_iP_{i+m}P_{i+m+1}$.

下面假设对于每个 $1\le i\le m,\sigma_i=\alpha_i+\beta_i$ 和 σ_{i+m} 中必有一个 $\ge\pi$. 不妨设 $\sigma_1\ge\pi$, 那么由 $\sigma_i+\sigma_{i+m+1}=P_i+P_{i+1}$ 知 $\sigma_{m+2}<\pi$ 则 $\sigma_2\ge\pi$; 重复以上讨Ø知 $\sigma_{m+1}\ge\pi$, 但 $\sigma_1+\sigma_{m+1}=P_1+P_{m+1}<2\pi$, 矛盾.

引理 2　设一个中心对称的凸 $2m$ 边形 $\mathcal{M}$ 的边所对应的向量为 $\pm\overrightarrow{\alpha_1},\pm\overrightarrow{\alpha_2},\ldots,\pm\overrightarrow{\alpha_m}$, 则其面积 $S(\mathcal{M})=\sum\limits_{1\le i<j\le m}|\overrightarrow{\alpha_i}\times\overrightarrow{\alpha_j}|$.

对 m 用归纳法容易得到引理 2 的证明, 我们在这里Ñ去.

回到原题. 不妨设该凸 N 边形 $\mathcal{M}$ 的边所对向量÷足 $|\overrightarrow{\alpha_1}|\le|\overrightarrow{\alpha_2}|\le\cdots\le|\overrightarrow{\alpha_m}|$. 在每个 $\overrightarrow{\alpha_j}$ 上都没有除端点外整点的前提下, 我们断言, 对每一个 $1\le j\le m$, 至多有 4 个 $i<j$ 使 $|\overrightarrow{\alpha_i}\times\overrightarrow{\alpha_j}|$ 都等于同一实数 k. 实际上只需注意到÷足 $|\overrightarrow{\alpha_i}\times\overrightarrow{\alpha_j}|$ 相等的 $\overrightarrow{\alpha_i}$ 终点都á在两条平行于 $\overrightarrow{\alpha_j}$ 的直线上即可. 而 $|\overrightarrow{\alpha_i}\times\overrightarrow{\alpha_j}|$ 必为整数, 于是由引理及断言可知

$$
\begin{aligned}
S(\mathcal{M})=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i<j}|\overrightarrow{\alpha_i}\times\overrightarrow{\alpha_j}|&\ge\sum_{\substack{j=4u+v\le m\\0\le v\le 3}}\left(\sum_{i\le u}4i+v(u+1)\right)\\
&\ge\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{8}(j+3)(j-1)=\frac{1}{24}m^3+\mathcal{O}(m^2)=\frac{1}{192}N^3+\mathcal{O}(N^2).
\end{aligned}
$$

至于上界构造是比较平凡的, 只需把向量 $\{\pm(k,1)|1\le k\le m\}$ 按斜Ç顺序首尾相接构成一个多边形 $\mathcal{M}_1$, 即有

$$f(N)\le S(\mathcal{M}_1)=\sum_{1\le i<j\le m}|(i,1)\times(j,1)|=\frac{1}{48}N^3+\mathcal{O}(N^2).\qquad\square$$

3.　更加精确的估计

命题 2　$f(N)$ 的定义同上, 则

$$\frac{1}{24\sqrt{3}\pi}N^3\le f(N)\le\frac{5\pi^2}{2592}N^3+\mathcal{O}\left(\sqrt{N^5\ln N}\right).$$

证明 (下界)　分析上一节的证明, 其下界不够精确的原因可能是分开计算外积的过程没有充分利用其凸性. 我们希望在一定程度上摆脱“整点”这个限制, 从几何的角度考察问题.

引理 3　平面上任何凸形 $\mathcal{C}$ 有内接仿射正 8 边形.

证明 当$\mathcal{C}$为平行四边形时, 命题显然成立. 下设$\mathcal{C}$不为平行四边形.

任取一条直线l, 设和l平行的$\mathcal{C}$的弦长度的上确界为T, 并取待定的$d<T$. 作两条平行于l的长度为d的弦AB和CD (当T在$\mathcal{C}$的边界$\partial\mathcal{C}$上取到时, 允许AB或CD包含于该边界). 设AD和BC交于O, 并作XO和OY平行等于AB.

当$d\to 0$时, 由于$XO\to 0$且直线XY趋于$\mathcal{C}$两条平行于l的支撑直线的平分线, 所以存在d使X位于$\mathcal{C}$的内部; 当$d\to T$时, 同理知存在d使X位于$\mathcal{C}$的外部. 由连续性知存在合适的d_1使X在$\partial\mathcal{C}$上.

若此时Y也在$\partial\mathcal{C}$上, 则$ABYCDX$即为所求. 否则不妨设Y在$\mathcal{C}$的内部, 方便起见记此时X,Y的位置为X_1,Y_1. 注意到可以将d_1适当扩大为d_2使Y在$\partial\mathcal{C}$上. 考Ä将l旋转180°的过程, 旋转的每个时刻都选取合适的d使得Y在$\partial\mathcal{C}$上. 那么旋转之后Y与X_1重合, X与Y_1重合, 于是旋转过程中X从$\mathcal{C}$的外部运动到 $\mathcal{C}$的内部, 故由连续性知该过程中存在某一时刻使X在$\partial\mathcal{C}$上, 此8边形即为所求.

回到原题. 记凸N边形$\mathcal{M}$为$P_1P_2\cdots P_N,S(\mathcal{M}),C(\mathcal{M})$为其面积和周长; 再记$S_i$为$\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$的面积, a_i为边$P_{i-1}P_i$的长度.

下面考Ä比值$t=\frac{S(\mathcal{M})}{\left(\prod\limits_{i=1}^{N}S_i\right)^{1/N}}$的大小.

注意到仿射变换不会改变t的值. 给$\mathcal{M}$内接一仿射正8边形$Q_1Q_2\cdots Q_6$并将其仿射成正8边形, 方便起见我们仍沿用仿射前的记号. 延长8边形的边交出一个“8角星”$R_1R_2\cdots R_6$. 过每个Q_j作$\mathcal{M}$的支撑直线l_j, 则易知$\mathcal{M}$含于“8角星”内. 设$\mathcal{M}$在$\triangle Q_jR_jQ_{j+1}$内部分的面积为T_j.

在$\triangle Q_jR_jQ_{j+1}$中作$\mathcal{M}$平行于Q_jQ_{j+1}的支撑直线U_jV_j, 并设它与$\mathcal{M}$的切点为W_j (如图 1). 设U_jV_j与Q_jQ_{j+1}的距离为$h_j,Q_jQ_{j+1}=a$. 考Ä l_{j+1}在“8角星”上所截面积知$T_j+T_{j+1}\le S_{\triangle Q_jR_jQ_{j+1}}$, 结合$T_j\ge S_{\triangle Q_jW_jQ_{j+1}}=\frac{1}{2}ah_j$知

$$H=\sum_{j=1}^{6}h_j\le\frac{3\sqrt{3}}{2}a.$$

由凸形外包线大于内包线得

$$C(\mathcal{M})\le\sum_{j=1}^{6}\left(Q_jU_j+U_jV_j+V_jQ_{j+1}\right)=6a+\frac{2}{\sqrt{3}}H.$$

又显然有

$$S(\mathcal{M})\ge 3\sqrt{3}a^2+\frac{1}{2}aH.$$

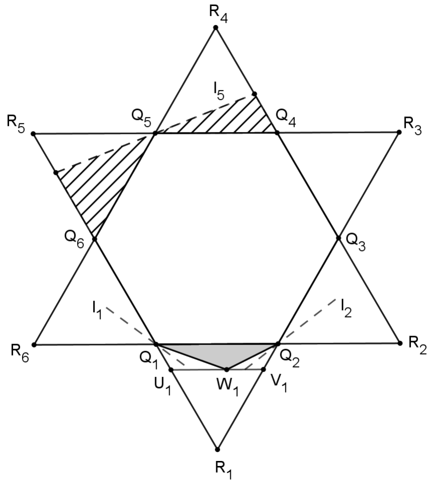

图 1

综合此三式得

$$\begin{aligned}
t &= \frac{S(\mathcal{M})}{C(\mathcal{M})^2} \cdot \frac{C(\mathcal{M})^2}{\left(\prod\limits_{i=1}^{N} S_i\right)^{1/N}} \\
&\geq \frac{3\sqrt{3}a^2 + \frac{1}{2}aH}{\left(6a + \frac{2}{\sqrt{3}}H\right)^2} \cdot \frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{N} a_i\right)^2}{\frac{1}{2}\left(\prod\limits_{i=1}^{N} a_i a_{i+1} \sin P_i\right)^{1/N}} \\
&\geq \frac{3a}{8\left(3\sqrt{3}a + H\right)} \cdot \frac{2N^2}{\sin \frac{\sum_{i=1}^{N} P_i}{N}} \\
&\geq \frac{N^2}{6\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sin \frac{2\pi}{N}} \\
&\geq \frac{1}{12\sqrt{3}\pi} N^3.
\end{aligned}$$

，一方面, 由于 $\triangle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ 是整点三角形, 其面积 $\geq \frac{1}{2}$, 所以 $t \leq 2S(\mathcal{M})$, 因此$S(\mathcal{M}) \geq \frac{1}{24\sqrt{3}\pi}N^3$, 证毕. □

证明 (上界) 一个自然的想法是, 使用尽可能短的一些向量作为凸 N 边形的边. 为 便于计算, 我们选择集合 $\mathscr{A}_n = \{(p,q) \mid \gcd(p,q) = 1, |p| + |q| \leq n\}$ 中的全体向量作为一凸多边形 $\mathcal{M}_2$ 的边, 为此需要先估计 $\mathscr{A}_n$ 的元素个数.

引理 4 设 φ 为欧拉函数, 并规定 $\varphi(1) = 1$, 则

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \frac{3}{\pi^2}n^2 + \mathcal{O}(n \ln n).$$

证明 熟知 $n=\sum\limits_{d|n}\varphi(d)$, 由 Mobius 反演得 $\varphi(n)=\sum\limits_{d|n}d\mu(\frac{n}{d})$. 于是

$$\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{d|k}\frac{k}{d}\mu(d)=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\sum_{\substack{1\le k\le n\\ d|k}}\frac{k}{d}=\frac{1}{2}\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2+\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\right).$$

对 n 用归纳法易得 $\sum\limits_{d=1}^{n}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor=1$, 从而

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left(\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor^2+\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\right)\\ =&\frac{1}{2}\left(\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left(\frac{n}{d}-\left\{\frac{n}{d}\right\}\right)^2+1\right)\\ =&\frac{1}{2}\left(n^2\sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{d^2}-2n\sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{d}\left\{\frac{n}{d}\right\}+\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left\{\frac{n}{d}\right\}^2+1\right).\qquad(*)\end{aligned}$$

注意到

$$\left|\sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{d}\left\{\frac{n}{d}\right\}\right|\le\sum_{d=1}^{n}\frac{d-1}{d^2}\le\ln n+1$$

以及 $\left|\sum\limits_{d=1}^{n}\mu(d)\left\{\frac{n}{d}\right\}^2\right|\le n$; 对于主项我们有

$$\begin{aligned}\sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{d^2}&=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}-\sum_{d=n+1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}\\ &=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{\mu(d)}{d^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\\ &=\prod_{p}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\\ &=\frac{1}{\prod\limits_{p}\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\cdots\right)}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\\ &=\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)\\ &=\frac{6}{\pi^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right),\end{aligned}$$

其中求积符号下的 p 取遍所有素数.把此三式代入 $(*)$ 即得结论.

下面估 $\mathcal{M}_2$ 的面积. 易知 $\sum\limits_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1, & n=1\\ 0, & n>1\end{cases}$, 并规定 $\mu(0)=1$, 由引理 2 得

$$S(\mathcal{M}_2)=\frac{1}{8}\sum_{\substack{(i,j)\in\mathscr{A}_n\\ (k,l)\in\mathscr{A}_n}}|(i,j)\times(k,l)|$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \sum_{\substack{1 \le |i|+|j| \le n \\ \gcd(i,j)=1}} \sum_{\substack{1 \le |k|+|l| \le n \\ \gcd(k,l)=1}} \left\| \begin{matrix} i & j \\ k & l \end{matrix} \right\| \\
&= \frac{1}{8} \sum_{\substack{1 \le |i|+|j| \le n \\ 1 \le |k|+|l| \le n}} \left\| \begin{matrix} i & j \\ k & l \end{matrix} \right\| \sum_{u \mid \gcd(i,j)} \mu(u) \sum_{v \mid \gcd(k,l)} \mu(v) \\
&= \frac{1}{8} \sum_{1 \le u,v \le n} \mu(u)\mu(v) \sum_{\substack{1 \le |i|+|j| \le n \\ u \mid i, u \mid j}} \sum_{\substack{1 \le |k|+|l| \le n \\ v \mid k, v \mid l}} \left\| \begin{matrix} i & j \\ k & l \end{matrix} \right\| \\
&= \frac{1}{8} \sum_{1 \le u,v \le n} uv\mu(u)\mu(v) \sum_{1 \le |i|+|j| \le \frac{n}{u}} \sum_{1 \le |k|+|l| \le \frac{n}{v}} \left\| \begin{matrix} i & j \\ k & l \end{matrix} \right\|. \qquad (**)
\end{aligned}
$$

接下来考察

$$
g(r,s) = \sum_{1 \le |i|+|j| \le r} \sum_{1 \le |k|+|l| \le s} \left\| \begin{smallmatrix} i & j \\ k & l \end{smallmatrix} \right\|
$$

的大小, 其中 $r, s \in \mathbb{N}^*$. 设 $I_{i,j}$ 为以点 (i,j) 为中心的单位正方形. 注意到对固定的向量 (k,l), 当 (k,l) 所在直线与 $I_{i,j}$ 内部不交时, 有 $\left\| \begin{smallmatrix} i & j \\ k & l \end{smallmatrix} \right\| = \iint_{I_{i,j}} \left\| \begin{smallmatrix} x & y \\ k & l \end{smallmatrix} \right\| dxdy$; 而当两者相交时, 记 (k,l) 所在直线在 $I_{i,j}$ 上所截面积较小的部分为 $J_{i,j}$, 则有

$$
\left\| \begin{smallmatrix} i & j \\ k & l \end{smallmatrix} \right\| = \iint_{I_{i,j}} \left\| \begin{smallmatrix} x & y \\ k & l \end{smallmatrix} \right\| dxdy - 2 \iint_{J_{i,j}} \left\| \begin{smallmatrix} x & y \\ k & l \end{smallmatrix} \right\| dxdy.
$$

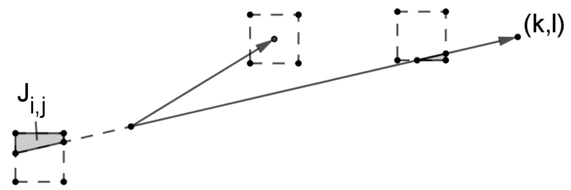

图 2

方便起见, 我们补充定义其他的 $J_{i,j} = \varnothing$. 由定义知不同的 (i,j) 对应的 $J_{i,j}$ 是互相不交的, 且 $J_{i,j}$ 中任何一点到 (k,l) 所在直线距离不超过 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 记 $\mathcal{T}_r$ 为直线 $\pm x \pm y = r$ 围成的正方形, 则有

$$
\sum_{1 \le |i|+|j| \le r} \left\| \begin{matrix} i & j \\ k & l \end{matrix} \right\| = \iint_{\mathcal{T}_r} \left\| \begin{matrix} x & y \\ k & l \end{matrix} \right\| dxdy + \iint_{(x,y) \in \bigcup\limits_{(i,j)} I_{i,j} \setminus \mathcal{T}_r} \left\| \begin{matrix} x & y \\ k & l \end{matrix} \right\| dxdy - 2 \iint_{\bigcup\limits_{(i,j)} J_{i,j}} \left\| \begin{matrix} x & y \\ k & l \end{matrix} \right\| dxdy.
$$

注意到

$$
\iint_{(x,y) \in \bigcup\limits_{(i,j)} I_{i,j} \setminus \mathcal{T}_r} \left\| \begin{smallmatrix} x & y \\ k & l \end{smallmatrix} \right\| dxdy \le 2r^2 \cdot \max\{|i|, |j|\},
$$

以及 $\iint\limits_{\bigcup\limits_{(i,j)} J_{i,j}} \|\begin{smallmatrix} x & y \\ k & l \end{smallmatrix}\| \, dxdy \le \frac{\sqrt{2}r(2r+1)}{2}$; 又经计算得对主项有

$$\iint\limits_{\mathcal{T}_r} \|\begin{smallmatrix} x & y \\ k & l \end{smallmatrix}\| \, dxdy = \frac{2\left(k^2+|kl|+l^2\right)}{3\left(|k|+|l|\right)} r^3,$$

从而

$$\begin{aligned}
g(r,s) &= \sum_{1\le|k|+|l|\le s} \left(\iint\limits_{\mathcal{T}_r} \left\|\begin{matrix} x & y \\ k & l \end{matrix}\right\| dxdy + \iint\limits_{(x,y)\in \bigcup\limits_{(i,j)} I_{i,j}\setminus\mathcal{T}_r} \left\|\begin{matrix} x & y \\ k & l \end{matrix}\right\| dxdy - 2 \iint\limits_{\bigcup\limits_{(i,j)} J_{i,j}} \left\|\begin{matrix} x & y \\ k & l \end{matrix}\right\| dxdy \right) \\
&= r^3 \sum_{1\le|k|+|l|\le s} \frac{2\left(k^2+|kl|+l^2\right)}{3\left(|k|+|l|\right)} + \mathcal{O}(r^2s^3) + \mathcal{O}(r^2s^2) \\
&= 4r^3 \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{k} \frac{2\left(l^2+l(k-l)+(k-l)^2\right)}{3k} + \mathcal{O}(r^2s^3) \\
&= \frac{20}{27} r^3s^3 + \mathcal{O}(r^3s^2) + \mathcal{O}(r^2s^3).
\end{aligned}$$

代回 (∗∗) 式得

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{M}_2) &= \frac{1}{8} \sum_{1\le u,v\le n} uv\mu(u)\mu(v) \cdot g\left(\lfloor n/u \rfloor, \lfloor n/v \rfloor\right) \\
&= \frac{1}{8} \sum_{1\le u,v\le n} uv\mu(u)\mu(v) \left(\frac{20}{27} \lfloor n/u \rfloor^3 \lfloor n/v \rfloor^3 + \mathcal{O}\left(\lfloor n/u \rfloor^3 \lfloor n/v \rfloor^2\right) \right. \\
&\qquad \left. + \mathcal{O}\left(\lfloor n/u \rfloor^2 \lfloor n/v \rfloor^3\right) \right).
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{1\le u,v\le n} uv\mu(u)\mu(v) \cdot \mathcal{O}\left(\left\lfloor \frac{n}{u} \right\rfloor^3 \left\lfloor \frac{n}{v} \right\rfloor^2 \right) \right| \\
&\le \left(\sum_{u=1}^{n} \frac{1}{u^2} \right) \left(\sum_{v=1}^{n} \frac{1}{v} \right) \cdot \mathcal{O}(n^5) \le \mathcal{O}(n^5 \ln n),
\end{aligned}$$

而对主项, 利用引理 4 证明过程中得到得结 Ø , 有

$$\begin{aligned}
&\sum_{1\le u,v\le n} uv\mu(u)\mu(v) \cdot \left\lfloor \frac{n}{u} \right\rfloor^3 \left\lfloor \frac{n}{v} \right\rfloor^3 \\
&= \sum_{1\le u,v\le n} uv\mu(u)\mu(v) \left(\frac{n^6}{u^3v^3} + \mathcal{O}(1) \left(\frac{n^3}{u^3} + \frac{n^3}{v^3} + 1 \right) \right) \\
&= n^6 \sum_{u=1}^{n} \frac{\mu(u)}{u^2} \sum_{v=1}^{n} \frac{\mu(v)}{v^2} + \mathcal{O}(n^5) \\
&= n^6 \left(\frac{6}{\pi^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \right)^2 + \mathcal{O}(n^5) \\
&= \frac{36}{\pi^4} n^6 + \mathcal{O}(n^5).
\end{aligned}$$

综合以上几式得 $S(\mathcal{M}_2)=\frac{10}{3\pi^4}n^6+\mathcal{O}(n^5\ln n)$. 所以对 $N=4\left|\mathscr{A}_n\right|$,

$$f(N)\leq S(\mathcal{M}_2)=\frac{5\pi^2}{2592}N^3+\mathcal{O}\left(\sqrt{N^5\ln N}\right);$$

而对其他的 N 用 $4\left|\mathscr{A}_n\right|<N<4\left|\mathscr{A}_{n+1}\right|$ 的 n 来放缩就可以得到结 ø. □

5. 总结

尽管本文中用比较繁琐的方法整点凸多边形最小面积做出　一个估计, 但该不等式两边的系数仍然相去甚远. 笔者感觉命题 2 的下界还有很大改进空间, 希望各位读者能够继续思考和加强本文中的结 ø.

6. 致谢

感谢欧阳泽轩、孙孟越、 4 润声、张质源同学, 李晋博士和冷岗松、冯跃峰老师等对文章的修改提出建议和指导.

参考文献

[1] 中等数学编辑部, 中等数学增刊(二). 天津师范大学出版社, 2014.

[2] 潘承洞, 潘承彪, 初等数 ø (第三版). 北京大学出版社, 2013.