由一道组合问题引发的思考

黎梓浩
(湖南省雅礼中学, 410007)

前段时间, 笔者做到了冯跃峰老师写的《组合构造》上面的一道题:

题 1. 某种彩票兑奖号码是 000 到 999 中的一个三位数, 如果所填的号码与兑奖号码有两个数位上的数字相同, 则中奖. 比如, 兑奖号码是 123, 则所填的 $12*$, $1*3$, $*23$ 等号码都中奖. 若可以适当填写 r 张彩票, 使其中至少有一张中奖, 求 r 的最小值.

这道题难度不小, 冯老师曾在书中的例题提到过这道题的一个特殊情况, 书中给出的解答也是类似于这个特殊的情况的证明, 进行了一系列较复杂的局部分析, 最终获证. 书中的解答具体如下:

解 r 的最小值为 50.

用 (a,b,c) 表示 a,b,c 中任何 2 个数的任何位置的彩票都中奖, 即当 a,b,c 互异时, 它包含这样 6 个号码: $\overline{abc}$, $\overline{acb}$, $\overline{bac}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$, $\overline{cba}$, 当 $a=b\neq c$ 时, 它包含这样 3 个号码: $\overline{aac}$, $\overline{aca}$, $\overline{caa}$, 当 $a=b=c$ 时, 它包含这样 1 个号码: $\overline{aaa}$.

当 $r\geq 50$ 时, 填写如下 50 张彩票:

$$A=\{(0,0,1),(1,1,2),(2,2,3),(3,3,0),(4,0,2),(4,1,3),(4,4,4)\},$$

$$B=\{(5,5,6),(6,6,7),(7,7,8),(8,8,5),(9,5,7),(9,6,8),(9,9,9)\}.$$

其中注意 $(0,0,1)$ 是 3 张彩票: $\overline{001}$, $\overline{010}$, $\overline{100}$, $(4,0,2)$ 是 6 张彩票: $\overline{402}$, $\overline{420}$, $\overline{042}$, $\overline{024}$, $\overline{240}$, $\overline{204}$ 等等, 则 $P=(0,1,2,3,4)$ 中任何两个数 x,y (允许 $x=y$) 都至少同时出现在 A 中的 7 个数组的某一个中, $Q=(5,6,7,8,9)$ 中任何两个数 x,y (允许 $x=y$) 都至少同时出现在 B 中的 7 个数组的某一个中.

设中奖的底票是 $\overline{abc}$, 将 a,b,c 归入两个集合 P,Q, 必定有 2 个数 (允许相同) 属于同一个集合, 这 2 个数都至少同时出现在 14 个数组的某一个中, 必然

收稿日期: 2018-04-01; 修订日期: 2018-04-19.

中奖.

另一方面, 我们要证明: 当 $r \leq 49$ 时, 可适当填一张底票, 使没有一张彩票中奖.

由于只有 $r \leq 49$ 张彩票, 考察这些彩票的第一位. $X = \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$ 的 10 个数中必有一个数, 设为 a, 它在第一位上出现次数 $d(a)$ 不多于 4 (否则, 每个都至少出现 5 次, 则至少有 $5 \cdot 10 = 50$ 张彩票, 矛盾).

(1) 若 $d(a) = 0$, 则将底票的首位填 a, 后两位的填法有 $10 \cdot 10 = 100$ 种. 从这 100 种填法中, 去掉所填的 39 张彩票末两位完全相同 39 个, 至少还剩下 1 个数对, 记为 $\overline{bc}$. 那么, 底票 $\overline{abc}$ 使 49 张彩票中没有一张彩票中奖.

(2) 若 $1 \leq d(a) \leq 3$, 令 A 为所填彩票中第一位为 a 的那些彩票的集合. 现将底票的首位填 a, 下面填底票的后两位, 使 49 张都不中奖.

先使 A 中的彩票不中奖. 从最坏的情形考虑: 第二位上不填这 $d(a) \leq 3$ 张彩票第二位上的数字, 于是第二位上至少还有 $10 - 3 = 7$ 个数字可填. 第三位上不填这 $d(a) \leq 3$ 张彩票第三位上的数字, 于是第三位上至少还有 $10 - 3 = 7$ 个数字可填. 从而使 A 中彩票不中奖的填法有 $7 \cdot 7 = 49$ 种.

从这 49 种填法中, 去掉与所填的首位不是 a 的至多 48 (因为 $d(a) \geq 1$) 张彩票末两位完全相同 48 个, 至少还剩下一个数对, 记为 $\overline{bc}$, 那么底票 $\overline{abc}$ 使 49 张彩票中没有一张彩票中奖.

实际上, 对任意一张所填的彩票, 如果第一位数不是 a, 则末两位不是 $\overline{abc}$ 的末两位, 从而不中奖. 如果第一位数是 a, 则它的第二位不是 b, 第三位不是 c, 从而也不中奖.

(3) 若 $d(a) = 4$, 令 A 为所填彩票中第一位为 a 的那 4 张彩票的集合. 先将底票的首位填 a, 下面填底票的后两位, 使 A 中 4 张彩票不中奖: 第二位上不填这 4 张彩票第二位上的数字, 于是第二位上至少还有 $10 - 4 = 6$ 个数字可填; 第三位上不填这 4 张彩票第三位上的数字, 于是第三位上至少还有 $10 - 4 = 6$ 个数字可填. 从而使第一位为 a 的那 4 张彩票不中奖的填法有 $6 \cdot 6 = 36$ 种. 如果有一种填法, 比如 $\overline{bc}$, 不包含在所填彩票的末两位中, 那么, 底票 $\overline{abc}$ 使 49 张彩票中没有一张彩票中奖. 假定每一种填法都包含在所填彩票的末两位中, 则至少有 36 张不属于 A 的彩票, 且这 36 张彩票, 第二位不含 A 中所有彩票第二位上的数字, 第三位不含 A 中所有彩票第三位上的数字. 记这 36 张彩票的集合为 B.

再考察 A 中彩票第二位上的数字, 如果 4 个数字互异, 则每个数字至少出

现 4 次 (否则, 若某个数字至少出现 3 次, 则类似于 $d(a) \le 3$ 的情形), 这样产生 $4 \times 4 = 16$ 张彩票, 其第二位与 A 中某张彩票第二位上的数字相同, 于是这些彩票都不属于 B, 从而至少有 $36 + 16 = 52$ 张彩票, 矛盾. 所以, A 中彩票第二位上数字至多 3 个互异. 同理, A 中彩票第三位上的数字也至多 3 个互异, 这样, 我们仍有 $7 \cdot 7 = 49$ 种使 A 中彩票不中奖的填法, 同样有一种填法, 使所有彩票都不中奖. □

之后, 笔者便想将此题作如下推广:

题 2. *某种彩票兑奖号码是 $(000)_n$ 到 $(n-1, n-1, n-1)_n$ 中的一个三位数, 如果所填的号码与兑奖号码有两个数位上的数字相同, 则中奖. 比如, 兑奖号码是 $(123)_n$, 则所填的 $(12*)_n, (1*3)_n, (*23)_n$ 等号码都中奖. 若可以适当填写 r 张彩票, 使其中至少有一张中奖, 求 r 的最小值. 其中 $(\cdot)_n$ 表示 n 进制.*

起初我们认为这道题难度并没有本质上的提高, 于是笔者与一些同学准备仿照冯老师书中给出的解答解决这道题, 结果遇到了很大的麻烦. 原解答中对于十进制这一条件的使用是不平凡的, 解答中分情况讨论的局部分析中出现的不等式大多都基于很小的情况, 这些不等式大多都不具备推广性, 故对于一般的情况基本无法奏效. 所以, 我们可以认为书中给出的解答是不本质的. 但是, 又经过了一段时间的思索后, 笔者发现这个推广的试题和原题具备一个共同特征, 即都是一个三位数. 这就使笔者联想到了可以将三位数对应到三维空间直角坐标系上的一个坐标, 这样一想我们就可以得到这个推广命题的等价转化命题.

空间直角坐标系中的 n^3 个点 (i, j, k) $(0 \le i, j, k \le n-1)$ 对应一个 $n \times n \times n$ 的立方体, 点 (i, j, k) 对应的 $1 \times 1 \times 1$ 方格代表一张号码为 $(i, j, k)_n$ 的彩票, 填写一张 $(i_0, j_0, k_0)_n$ 的彩票相当于从 $n \times n \times n$ 的立方体中删去所有由 (i_0, j_0, k_0) 引出的平行于棱的 3 条直线穿过的方格. 若经过 r 次删除后, 仍留下了至少一个小方格, 则让兑奖号码为其中一个方格所对应的号码, 就不会中奖. 若想中奖, 必须要删完所有小方格. 故题 2 可等价转化为:

题 3. *在一个 $n \times n \times n$ 的立方体中选取 r 个 $1 \times 1 \times 1$ 的小方格, 经过它们每一个的中心引平行于棱的 3 条直线, 然后删除所引的直线穿过的小方格 (称为一次操作). 求 r 的最小值, 使得能够去掉所有的小方格.*

转化成题 3 之后, 问题并没有什么实质上的推进, 仅仅只是将题 2 的一些条件在空间直角坐标系中得以形象的体现. 拿到这个等价问题, 笔者回顾了一下 2017 年中国冬令营的第二题, 那也是一个有关于立方体的问题. 那个问题的

解题思路也就是一般关于立方体问题的解题思路——从低维角度入手, 再考虑高维问题, 也就是一种降维的思想. 这种降维的思想在之前我校段钦瀚同学的文章中也有充分体现. 于是我们想将本题转化为如下一个二维的问题:

题 4. 在 $n\times n$ 方格棋盘中选取 r 个格, 然后删去所有由选定格引出的平行于格线的 2 条直线穿过的方格. 若经过 r 次删除后, 能够去掉所有方格, 求 r 的最小值.

解决这个问题并不难, 但难以推广到 3 维的情形. 由此我们想到降维的另一种方式——生成元思想: 将 3 维问题转化为一个 2 维问题, 使 2 维问题的解能生成 3 维问题的解.

对于 2 维问题, 很自然的想到考虑这个立方体的下底面. 为了刻画这个 $n\times n$ 方格表每个方格为下底的 $1\times 1\times n$ 棱柱中被选取的方格的数量, 想到要在每个方格内填数, 得到如下的 二维问题:

题 5. 在 $n\times n\times n$ 的立方体的下底面的每一个方格中都填入一个自然数, 表示以该方格作为下底的一摞方格 (即一个 $1\times 1\times n$ 的长方体) 中所选取的小方格的数目, 所填数的和为 r. 如果能按所填数目在立方体中能选取 r 个方格, 且对所选的每个方格都进行一次操作后能去掉所有方格, 求 r 的最小值.

为了使 r 尽可能小, 能否每一摞只选取一个格? 这样一想, 问题又转化为一个更强的问题:

题 6. 在 $n\times n\times n$ 的立方体下底面的每一个方格中都填入 0 或 1, 所填数的和为 r. 如果某个方格填 t $(t=0,1)$, 则可在该格所在一摞中选取 t 个方格, 且对所选的每个方格都进行一次操作后能去掉所有方格, 求 r 的最小值.

上述填数后的正方形棋盘具有怎样的性质呢? 从极端考虑, 我们发现如果有某个方格填 0, 为了去掉该方格所在一摞的 n 个小方格, 则需要从该方格所在行、列的其余 $2n-1$ 方格对应的 $2n-1$ 摞方格中找到至少 n 个所选取的小方格作为帮手, 以去掉该方格所在一摞的 n 个小方格. 也就是说, 若某格填 0, 则该格所在行与列的填数之和不小于 n.

这使我们马上联想到一个熟知的问题:

题 7. 在 $n\times n$ 方格棋盘中填数 0 或 1, 若某格填 0, 则该格所在行与列的填数之和不小于 n. 求证: 整个方格表中所填数之和不小于 $\frac{n^2}{2}$.

当转化到问题 7 时, 笔者已经恍然大悟, 这道题至此几乎已经要做完了. 因

为这个命题是一道比较常见的练习题, 手法也十分标准, 采用充分条件分类即可. 具体过程如下:

题 7 的解 考虑所有的行和与列和, 如果它们都不小于 n, 则结论显然成立. 否则它们中的最小值 $k<n$, 不妨设最小值就是第一行的和, 那么该行有不少于 $n-k$ 个 0, 在这些 0 所在的列的其余方格中填入的数之和都不小于 $n-k$, 其余 k 列的列和显然都不小于 k, 所以整个方格表中所填数之和不小于 $(n-k)^2+k^2 \geq \frac{n^2}{2}$.

故综上可知 $r \geq \frac{n^2}{2}$, 又 $r \in \mathbb{N}^*$, 所以 $r \geq \left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$.

最后我们还需要给出具体的构造, 这没有太大的难度, 只要分奇偶分别构造即可.

下给出当 $r=\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$ 时的构造:

定义在 $n \times n$ 方格表中的一个方格内填入 t, 表示选取该方格对应的一摞方格中位于第 t 层的方格, 特别地, 在 (i,j) 方格内填入 t, 表示选取 (i,j,t) 对应的方格; 不填数表示不取.

那么, 当 $n=2s$ 时, 分别将 $1,2,\cdots,s$ 和 $s+1,s+2,\cdots,2s$ 填入左下角和右上角处的 $s \times s$ 方格表, 使得其中每个数都出现在每一行与每一列中各一次. 此时, 对于已经填有数的方格对应的一摞方格, 由该摞已经选取的方格删去; 对于未填有数的方格, 其所在行和列的其余方格中恰好包含 $1,2,\cdots,2s$ 各一次, 则其对应摞的 $2s$ 个方格恰好被完全删去, 符合要求;

当 $n=2s+1$ 时, 分别将 $1,2,\cdots,s$ 和 $s+1,s+2,\cdots,2s+1$ 填入左下角 $s \times s$ 方格表和右上角 $(s+1)\times(s+1)$ 方格表, 使得其中每个数都出现在每一行与每一列中各一次. 此时, 对于已经填有数的方格对应的一摞方格, 由该摞已经选取的方格删去; 对于未填有数的方格, 其所在行和列的其余方格中恰好包含 $1,2,\cdots,2s+1$ 各一次, 则其对应摞的 $2s+1$ 个方格恰好被完全删去, 符合要求.

这里再将 $n=6,7$ 的情况画图说明构造:

			4	5	6
			5	6	4
			6	4	5
1	2	3			
2	3	1			
3	1	2			

			4	5	6	7
			5	6	7	4
			6	7	4	5
			7	4	5	6
1	2	3				
2	3	1				
3	1	2				

所以 $r_{\min}=\left\lceil \frac{n^2}{2} \right\rceil$. □

说了这么多, 到这里这个推广命题已经彻底做完了. 值得提出的是这个做法应该是本题的较本质的做法. 回溯整个探索的过程, 笔者发现这种利用空间直角坐标系转化命题的手法, 及在证明转化命题中出现的解决有关立方体的组合问题的降维思想, 值得学习与利用. 其往往能将一个复杂的组合问题更加直观形象化, 再由低维命题向高维命题逐步逼近, 更快抓住问题的本质.

由此, 笔者提供下面两道练习题供读者练习:

练习 1. 设正整数 $n \geq 3$. 设 $x_{i,j,k} \in \mathbb{Z}\,(1 \leq i,j,k \leq n)$. 定义:

$$I_{j,k} = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j,k},\ \ J_{k,i} = \sum_{j=1}^{n} x_{i,j,k},\ \ K_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} x_{i,j,k};$$

$$I^* = \{I_{a,b} \mid 1 \leq a,b \leq n\},\ \ J^* = \{J_{a,b} \mid 1 \leq a,b \leq n\},\ \ K^* = \{K_{a,b} \mid 1 \leq a,b \leq n\}.$$

问: 是否存在互不相等的 $x_{i,j,k}$, 使得 $|I^* \cup J^* \cup K^*| = 1$?

分析 此题若将其定义为一道代数题, 则极有可能会认为答案是否定的. 我们考察此题的形式, 发现 $I_{j,k}, J_{k,i}, K_{i,j}$ 的定义即为对于一些三维的对象固定两维进行求和, 这便使人不禁想到将其转化为一个空间立方体, 则 $I_{j,k}, J_{k,i}, K_{i,j}$ 也就被赋予了明确的组合意义, 即对一列方格求和, 这为我们解答本题提供了极大的帮助, 明确了这题本质是一道组合构造题.

解 存在. 下证明存在互不相等的 $x_{i,j,k} \in \mathbb{Z}$ 使得 $I^* \cup J^* \cup K^* = \{0\}$.

将原命题作如下转化: 考虑空间直角坐标系内的 n^3 个点 (i,j,k) $(1 \leq i,j,k \leq n)$, 将这 n^3 个点每点对应成一个 $1 \times 1 \times 1$ 的小立方体, 则这 n^3 个点对应成一个 $n \times n \times n$ 的立方体. 在 (i,j,k) 对应的小立方体内填入 $x_{i,j,k}$, 则 $I^* \cup J^* \cup K^*$ 即为全体由一列平行于某条棱的 n 个方格内填数之和构成的不可重集. 下只需证存在 n^3 个不同的整数, 使得平行于立方体的任一条棱的 n 个方格内填数之和为 0.

仍考虑降维的思想, 首先若已经存在 n^2 个不同整数, 使得在 $n \times n$ 的方格表中各行和、各列和为 0, 则设此 $n \times n$ 面为"α". 下定义 $n \times n$ 面"$k\alpha$"$(k \in \mathbb{Z})$ 表示该 $n \times n$ 面上与 $n \times n$ 面"α"对应位置上填的整数成 k 倍关系, 即 $n \times n$ 面"α" 上的数 x 对应 $n \times n$ 面"$k\alpha$"上的数 kx. 则再构造 $n \times n$ 面"$a_1\alpha$", a_1 为一个大于 $n \times n$ 面"α"上所有数的绝对值的正整数, 再构造 $n \times n$ 面"$a_2\alpha$", a_2 为一个大于 $n \times n$ 面"$a_1\alpha$"上所有数的绝对值的正整数, 同理构造 $n \times n$ 面"$a_3\alpha$", $\cdots$, "$a_{n-2}\alpha$" 最后构造一个 $n \times n$ 面"$-(1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-2})\alpha$". 则用这 n 个 $n \times n$ 面拼成一个 $n \times n \times n$ 立方体, 易知在每个面内的一列

n 个方格填数之和为 0, 在垂直于这些面的一列 n 个方格填数之和等于 $x+a_1x+a_2x+\cdots+a_{n-2}x-(1+a_1+a_2+\cdots+a_{n-2})x=0$ 符合要求. 故只需证明存在 n^2 个不同整数, 使得在 $n\times n$ 的方格表中各行和、各列和为 0.

继续考虑降维的思想, 若已经存在 n 个不同整数, 使得在 $n\times n$ 的方格表的第一行行和为 0. 则类似前面的手法, 构造第 2 行的数为第 1 行对应位置的 b_1 倍, 其中 b_1 为一个大于第 1 行所有数的绝对值的正整数. 同理构造第 3 行, $\cdots$, 第 $n-1$ 行, 最后构造第 n 行的数为第 1 行对应位置的 $-(1+b_1+b_2+\cdots+b_{n-2})$ 倍. 则各行和显然为 0, 各列和为 $x+b_1x+\cdots+b_{n-2}x-(1+b_1+\cdots+b_{n-2})x=0$ 符合要求. 最后仅需构造一行 n 个不同的整数之和为 0, 其实这个构造也用了类似前面的手法, 这里不再赘述, 直接给出构造: $1,2,\cdots,n-1,-\frac{n(n-1)}{2}$.

综上, 存在这样的互不相等的 $x_{i,j,k}\in\mathbb{Z}$ 符合条件. $\square$

评注 本题中 $n\geq 3$ 是本质的, 这里请读者自己从解答中体会哪些地方隐隐用到了 $n\geq 3$ 这一条件. 本题中多次使用降维思想, 将其与倍乘构造结合解决了问题.

练习 2. 已知 $n\in\mathbb{N}^*$, $n\geq 3$, 记集合

$$A=\{1,2,\cdots,n\},\ B=\{n+1,n+2,\cdots,2n\}\ \ C=\{2n+1,2n+2,\cdots,3n\},$$

从 A,B,C 中各选取一个元素 a,b,c 构成有序三元数组 (a,b,c), 用红、蓝两色对所有数组进行染色, 每个数组恰被染为一种颜色, 且使得 $S_{(a,a';b,b';c,c')}$ 中红色数组的个数为 4 的倍数. 求染色方法数. 其中

$$S_{(a,a';b,b';c,c')}=\{(a,b,c),(a,b,c'),(a,b',c),(a,b',c'),(a',b,c),(a',b,c'),\\(a',b',c),(a',b',c')\}$$

满足 $a,a'\in A$; $b,b'\in B$; $c,c'\in C$, $a\neq a'$, $b\neq b'$, $c\neq c'$.

分析 本题最令人感到不适的应当是 $S_{(a,a';b,b';c,c')}$ 的复杂定义, 再仔细考察 $S_{(a,a';b,b';c,c')}$ 的结构, 若把这 8 个数组看成 8 个在空间直角坐标系中的点的话, 会惊奇地发现它们构成了一个长方体. 在仔细考察 A,B,C 的结构, 发现由这三个集合中元素组成的数组, 可通过一个映射对应到一个立方体的方格对应的点上, 这便将命题转化.

解 建立空间直角坐标系. 设空间中一点 (x,y,z) 对应一个数组, 此数组为 $(x+1,y+n+1,z+2n+1)$ $(x,y,z\in\{0,\cdots,n-1\})$, 显然这是一个一一对应, 则此时 $S_{(a,a';b,b';c,c')}$ 中的 8 个数组恰好为空间中某个棱平行于坐标轴的长方体

的 8 个顶点. 故此题可表述为: 在坐标空间中给定一个点集 E, 它由 3 个坐标都是从 0 到 $n-1$ 之间的整数的所有点组成. 将 E 中每点都涂上红、蓝两色之一, 使顶点在 E 中而棱平行于坐标轴的每个长方体上的红色顶点数都能被 4 整除. 问这样的不同涂色法共有多少种?

若存在一个矩形,其顶点均在 E 中,且边平行于坐标轴. 但红顶点数为奇数个, 设为 $k\ (k=1,3)$.

不妨设其 4 个顶点为 (x_1,y_1,z_1), (x_1,y_1,z_2), (x_1,y_2,z_1), (x_1,y_2,z_2).

则考虑 (x_2,y_1,z_1), (x_2,y_1,z_2), (x_2,y_2,z_1), (x_2,y_2,z_2) 这 4 点应恰有 $(4-k)$ 个红顶点.

同理 (x_3,y_1,z_1), (x_3,y_1,z_2), (x_3,y_2,z_1), (x_3,y_2,z_2) 这 4 点应恰有 $(4-k)$ 个红顶点.

故这 8 个点恰为一个顶点在 E 中而棱平行于坐标轴的长方体的 8 个顶点, 而其中只有 $(8-2k)$ 个红顶点, 但是 $4\nmid 8-2k$ 矛盾.

所以每一个边平行于坐标轴的顶点在 E 中的矩形的红顶点数为偶数个. ①

设

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1, & \text{点 } (x,y,z) \text{ 为红色}\\ -1, & \text{点 } (x,y,z) \text{ 为蓝色}\end{cases}$$

则由 ① 易知 $f(x,y_1,z_1)\cdot f(x,y_1,z_2)\cdot f(x,y_2,z_1)=f(x,y_2,z_2)$.

现将 x 轴, y 轴, z 轴上的点任意染色.

因为

$$\begin{aligned}f(x,y,z)&=f(0,y,z)\cdot f(x,0,z)\cdot f(0,0,z)\\&=\ (f(0,y,0)\cdot f(0,0,z)\cdot f(0,0,0))\\&\quad\ \cdot(f(0,0,z)\cdot f(x,0,0)\cdot f(0,0,0))\cdot f(0,0,z)\\&=f(x,0,0)\cdot f(0,y,0)\cdot f(0,0,z)\end{aligned}$$

所以点 (x,y,z) 颜色已确定下来.

下面只需证对于任意一个题中所述的长方体, 其 8 个顶点中红色顶点数为 4 的倍数. 这稍微讨论即可, 不作太多赘述.

故符合题意的染色方法数为 2^{3n-2} 种. □

评注 此题总的来说不是很难, 关键点有三个, 一是命题的转化, 若不进行这步转化, 则不易看清问题的本质. 二是特征函数的建立. 三是进行大胆的猜测, 给出染色. 但每一步都较自然, 没有什么大的跳跃.