

# 数学新星问题征解

第二十七期 (2018.05)

主持: 牟晓生

**第一题.** 给定三角形  $ABC$ , 其中  $BC$  边最短.  $D$  是  $BC$  上的动点,  $E, F$  分别是  $AC, AB$  上的点, 满足  $AE = BD, AF = CD$ . 设  $\triangle ABC, \triangle BDF, \triangle CDE$  的外心分别为  $O, O_B, O_C$ . 证明在点  $D$  变化时  $\triangle OO_BO_C$  的外接圆经过除  $O$  外的另一个定点.

(中国人民大学附属中学 张端阳 供题)

---

**第二题.**  $\triangle ABC$  内接于圆  $O$ .  $E, F$  分别在  $AC, AB$  延长线上.  $\triangle ABE$  与  $\triangle ACF$  的外接圆交于另一点  $P$ . 过  $A$  分别作这两个圆的切线, 与圆  $O$  分别交于  $X, Y$ .  $XY$  交  $BC$  于点  $R$ ,  $AR$  与  $\triangle ABE, \triangle ACF$  的外接圆分别交于  $U, V$ .  $\triangle AXV$  与  $\triangle AYU$  的外接圆交于另一点  $W$ . 证明:  $P, A, W$  三点共线.

(杭州二中学生 赵凯文 供题)

---

**第三题.** 证明下面的不等式对任意正整数  $n$  以及实数  $x$  都成立:

$$1 + \sum_{k=1}^n \frac{\cos(kx)}{k} \geq 0.$$

(哈佛大学 牟晓生 供题)

---

**第四题.** 设  $f(x)$  是首一的整系数多项式, 满足其所有根均为区间  $(0, 3)$  上的实数. 证明这些根只可能是  $1, 2$  或者  $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

(哈佛大学 牟晓生 供题)