一道组合难题的简单解法

冯跃峰

2017 年中国国家集训队第 3 轮测试中有如下一个组合问题:

题目. 将 2017×2017 方格棋盘的每个方格染黑白 2 色之一，使每个方格至少与一个同色方格相邻 (有公共边). 黑、白方格的集合分别记为 V_1, V_2，对 $V_i\ (i=1,2)$ 中每两个相邻的方格的中心都用一条线段连接, 得到的图记为 G_i. 试证: 如果 G_1, G_2 都是连续的折线 (无环路, 不分叉), 则棋盘的中心必定是 G_1 或 G_2 的端点.

【述评】本题应该算是一道“难题”, 因为当年参加集训的学生中除 9 人得分外, 其余考生都得 0 分. 原解答也很繁, 占用了近 2 个版面的篇幅 (见《走向 IMO（2017）》p123). 我们这里给出一个简单的证明, 只需 12 行字就够了. 从这个角度看, 本题似乎又不算“难题”.

有趣的是, 我们的解答中几乎只用到小学的知识, 这是本题的一大特色, 也是组合问题的魅力所在.

【题感】从条件看, 似乎有图论背景, 但又不是纯碎的图论问题, 因为涉及到格的位置, 比如“中心”.

不过, 借用图论的语言, 条件可简单地表述为: $G_i\ (i=1,2)$ 都是无圈的连通图, 且每点的度大于 0 小于 3.

由于“边”不仅隐含格的相邻性, 还包含了方向与位置, 自然想到研究图的局部性质: 由一条边的方向研究下一条边的方向, 由此不断扩展, 期望找到折线的端点.

从目标看, 折线有一个端点为“中心格”, 不妨先考察两折线以“中心格”为一个端点时, 折线的整体结构, 借以发现“端点”的可能分布.

容易发现合乎条件的两条折线如图 1.

由图 1 可知, 有两个端点在角上. 由此想到从角格出发, 寻找两折线 4 个端

收稿日期: **2018-1-25.**

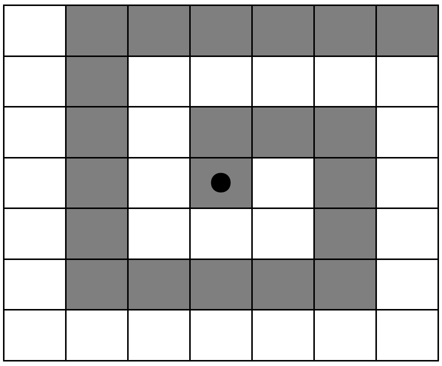

图 1

点的位置.

【局部性质】考察格 a_{11}, 若它不是端点, 则它的度为 2, 必定向右方和下方连边. 同样, 若格 a_{22} 也不是端点, 则必定向右方和下方连边 (图 2).

【局部扩展】如此下去, 必定可以找到 i $(1 \le i < n = 2017)$, 使格 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{i-1,i-1}$ 都不是端点, 而格 a_{ii} 是端点. 其中 $i < n$ 是显然的, 否则 a_{nn} 是孤立点 (图 2), 不连通, 矛盾.

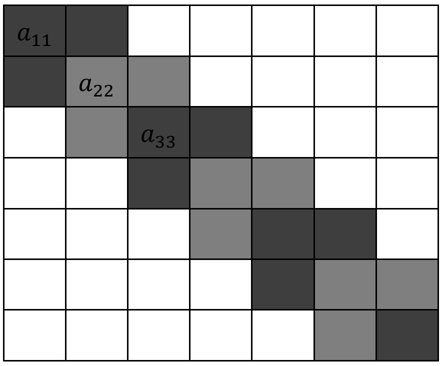

图 2

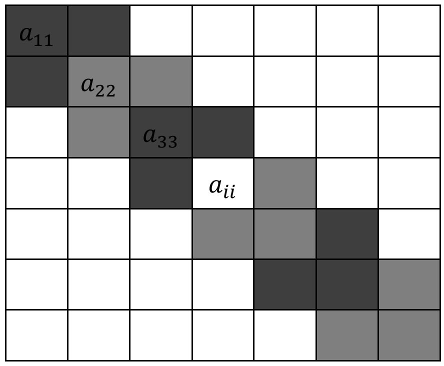

图 3

【平行推理】对称地, 必定可以找到 j $(1 < j \le 2017)$, 使格 $a_{nn}, a_{n-1,n-1}, \cdots,$ $a_{j+1,j+1}$ 都不是端点, 而格 a_{jj} 是端点.

如果 $i = j$, 分别考察格 $a_{i-1,i-1}, a_{i+1,i+1}$ 引出的两条边组成的两个“直角”. 如果两个直角同色, 则 a_{ii} 是另一色的孤立点, 矛盾; 如果两个直角异色, 则 a_{ii} 必与其中一个直角同色, 产生长为 4 的同色圈 (图 3), 矛盾.

【拟对象逼近】于是, 135° 主对角线 r_1 上至少两个端点. 同理, 45° 主对角线 r_2 上至少两个端点.

【反面思考】如果中心格不是端点, 则以上 4 个端点互异, 包含了 2 条折线的所有端点.

【奇偶分析】对于格 a_{ij}, 如果 $i+j$ 为奇(偶)数, 则称之为奇(偶)格. 显然

任何相邻两格不同奇偶, r_1, r_2 上的格都为偶格.

由于黑折线两个端点都是偶格, 且各格奇偶交替排列, 从而黑折线上共有奇数个格. 同理, 白折线上共有奇数个格. 由此可见, 棋盘共有偶数个格.

但棋盘格的个数 2017^2 是奇数, 矛盾.

【新写】 考察格 a_{11}, 若它不是端点, 则它必向右方和下方连边. 接着考察格 a_{22}, 如此下去, 必定找到 $i\ (1 \leq i < n = 2017)$, 使格 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{i-1,i-1}$ 都不是端点, 而格 a_{ii} 是端点. 对称地, 必定找到 $j\ (1 < j \leq 2017)$, 使格 $a_{nn}, a_{n-1,n-1}, \cdots, a_{j+1,j+1}$ 都不是端点, 而格 a_{jj} 是端点.

如果 $i = j$, 则格 $a_{i-1,i-1}, a_{i+1,i+1}$ 引出的两条边组成的两个"直角"或者包围着格 a_{ii} 成为孤立点, 或者其中一个与 a_{ii} 构成长为 4 的同色圈, 矛盾. 于是, 135° 主对角线上至少两个端点. 同理, 45° 主对角线上至少两个端点. 如果中心格不是端点, 则以上 4 个端点互异, 包含了 2 条折线的所有端点.

对于格 a_{ij}, 如果 $i + j$ 为奇(偶)数, 则称之为奇(偶)格. 由上可知, 黑折线两个端点都是偶格(主对角线上), 且折线各格奇、偶交替排列, 从而黑折线上共有奇数个格. 同理, 白折线上共有奇数个格. 由此可见, 棋盘共有偶数个格, 与总格数 2017^2 是奇数矛盾. 证毕.