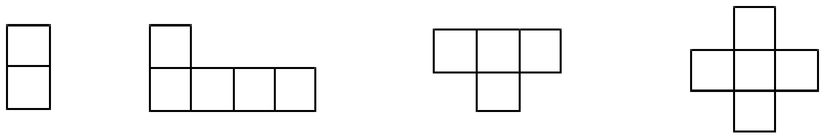
关于棋盘饱和覆盖的一个猜想

冯跃峰

在 [1] 中, 我们给出了棋盘饱和覆盖的定义: 给定一种图形 (称为覆盖形), 它由若干方格组成, 且每个方格都至少与其中一个方格有公共边.

在 $m \times n$ 的方格棋盘上放置若干个同样规格的图形, 每个图形的每个格都恰好完整覆盖棋盘的一个格, 且任何两个图形没有覆盖公共的格. 如果棋盘上的任何位置都不能再放进一个该规格的图形, 则称上述覆盖为 $m \times n$ 方格棋盘的该图形的饱和覆盖.

最常见的覆盖形有: 1×2 骨牌, $k - L$ 形, $4 - T$ 形, 十字形等.



对于 $m \times n$ 方格棋盘的饱和覆盖 P, 其覆盖形的个数记为 $|P|$, 研究 $|P|$ 的最小值是一个相当困难的问题. 即使是最简单的覆盖形: 1×2 骨牌, $m \times n$ 方格棋盘的饱和覆盖 P 中 $|P|$ 的最小值也没有解决, 我们仅仅得到如下的结论 [1]:

定理 1. 设 P 是 $m \times n$ 方格棋盘相对于 1×2 骨牌的饱和覆盖, 其中 $3 \mid mn$, 则 $|P|_{\min} = \frac{mn}{3}$.

本文给出如下的

猜想. 设 P 是 $m \times n$ 方格棋盘相对于 1×2 骨牌的饱和覆盖, 其中 $2 \le m \le n$, 则 $|P|_{\min} = \lceil \frac{mn}{3} \rceil$.

我们的初步结果是:

定理 2. 设 P 是 $m \times n$ 方格棋盘相对于 1×2 骨牌的饱和覆盖, 其中 $2 \le m \le n$, 则 $|P| \ge \lceil \frac{mn}{3} \rceil$.

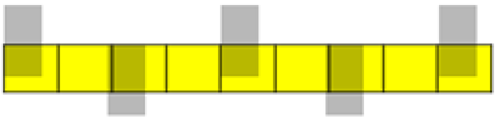
下面介绍我们的研究思路.

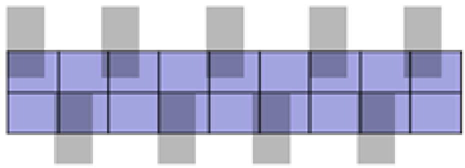
收稿日期: 2017-12-31.

【题感】从目标看, 研究骨牌数的下界, 等价于研究覆盖格的个数的下界. 由此想到将棋盘分为若干块, 期望每个小块中覆盖的格数“最优”(至少覆盖格数与总格数之比最大), 由此得到下界估计.

如何分块才使小块中覆盖的格数“最优”? 可先研究特例. 我们固定列数为 n, 对行数 $m = 1, 2, 3, \cdots$ 进行研究.

【研究特例】对于 $1 \times n$ 的块, 相邻 2 格有一个格被覆盖即可, 此时很“不优”(仅占 $\frac{1}{2}$). 其中注意骨牌并不限定在块内, 只需骨牌在原棋盘内.





对于 $2 \times n$ 子棋盘, 按如下方式覆盖是饱和的, 此时也只覆盖了子棋盘中 $\frac{1}{2}$ 的格, 很”不优”.

【发掘引理】对于 $3 \times n$ 子棋盘, 容易发现, 至少覆盖总格数的 $\frac{2}{3}$ (较优). 由此得到一个关键的引理:

引理 1. *当 $n \geq 3$ 时, 对于棋盘饱和覆盖中的任何一个 $3 \times n$ 子棋盘, 都至少有 $2n$ 个格被骨牌覆盖.*

证明 考察 $3 \times n$ 棋盘中间一行方格在 P 中的覆盖情况.

如果有某两个相邻的方格被同一块横向骨牌盖住, 则该骨牌上方和下方的 4 邻格至少有 2 格在 P 中被骨牌盖住, 否则 P 是不饱和的. 于是, 这块骨牌所在的连续两列在 P 中被盖住的方格不少于它的总格数的 $\frac{2}{3}$.

去掉所有这样的连续两列, 则剩下的任何列的 3 格中最多有一个空格 (未被骨牌盖住的格), 被盖住格也不少于 $\frac{2}{3}$. 否则只能是两头两个方格为空格, 中间一格被横向骨牌盖住, 但这是前述被去掉了的情形.

由此可知, $3 \times n$ 棋盘在 P 中被盖住的格数不少于它的总格数的 $\frac{2}{3}$, 引理 1 获证. □

【充分条件分类】当 mn 为 3 的倍数时, 由引理 1, 不等式显然成立.

剩下的问题是, 如果 m、n 模 3 都余 1 或 2, 问题如何解决? ——自然要分割出若干 $3 \times n$ 的矩形, 剩下一个 $1 \times n$ 或 $2 \times n$ 的矩形.

这两种情形可以统一: m 模 3 余 2 时, 分割出 2 行, 剩余的行数为 3 的倍数; m 模 3 余 1 时, 将其中“4 行”分割为 2 个“2 行”即可.

于是, 当 $m \geq 4$, $3 \nmid m$ 时, $m \times n$ 棋盘总可以分割为若干个 $3 \times n$ 棋盘和一

个或两个 $2\times n$ 棋盘. 而且, 当有 2 个 $2\times n$ 棋盘时, 可将其都放在棋盘的首尾边界上.

由此可知, 我们需要研究棋盘边界上的 $2\times n$ 子棋盘在覆盖中至少被覆盖多少个格.

为此, 先给出一个定义: 对棋盘饱和覆盖中的一个偶行的矩形子棋盘, 如果矩形中位线一侧的边界上都没有覆盖骨牌, 则称该矩形为“半闭矩形”.

【发掘引理】当分割的 $2\times n$ 子棋盘放置在棋盘边界上时, 它在覆盖中就是一个“半闭矩形”, 我们需要研究 $2\times n$“半闭矩形”在覆盖中至少被覆盖多少个格, 由此得到如下引理:

引理 2. 对棋盘饱和覆盖中任何一个 $2\times r$ 的“半闭矩形”$(1\leq r\leq n)$, 其被覆盖格的个数不少于该矩形格数的 $\frac{2}{3}$.

证明 对 r 归纳. 当 $r=1$ 时, 结论显然成立;

设结论对小于 r 的自然数成立, 考虑 $2\times r$ 的“半闭矩形”. 不妨设子棋盘上半部边界格线上没有覆盖骨牌, 设最上边一行各格依次为 $a_1,a_2,\cdots,a_r$; 下边一行各格依次为 $b_1,b_2,\cdots,b_r$.

先考察格 a_1, 如果 a_1 被纵向覆盖, 则 a_1、b_1 被同一块骨牌纵向覆盖. 此时, 去掉这一列, 则去掉的 2 个格都是被覆盖的, 其被覆盖的格的个数不少于这一列格子总数的 $\frac{2}{3}$.

此外, 剩下的矩形左边界没有被覆盖, 它是“半闭矩形”, 由归纳假设, 结论成立.

如果 a_1 被横向覆盖, 则只能与 a_2 被同一块骨牌覆盖, 此时 b_1、b_2 中至少有一个格被覆盖. 去掉这 2 列, 则去掉的 4 个格中有 3 个是被覆盖的, 其被覆盖的格的个数不少于这 2 列格子总数的 $\frac{2}{3}$.

此外, 剩下的矩形左边界上半部没有被覆盖, 它是“半闭矩形”, 由归纳假设, 结论成立.

如果 a_1 为空格, 则 b_1、a_2 都被覆盖.

若 a_2 被横向覆盖, 则只能与 a_3 被同一块骨牌覆盖, 此时 b_2、b_3 中至少有一个格被覆盖. 去掉前 3 列, 则去掉的 6 个格中有 4 个是被覆盖的, 其被覆盖的格的个数不少于这 3 列格子总数的 $\frac{2}{3}$.

此外, 剩下的矩形左边界上半部没有被覆盖, 它是“半闭矩形”, 由归纳假设, 结论成立.

若 a_2 被纵向覆盖, 则 b_1 被横向或纵向覆盖. 去掉前 2 列, 则去掉的 4 个格

中有 3 个是被覆盖的, 其被覆盖的格的个数不少于这 2 列格子总数的 $\frac{2}{3}$.

此外, 剩下的矩形左边界没有被覆盖, 它是“半闭矩形”, 由归纳假设, 结论成立.

综上所述, 引理 2 获证. $\square$

【定理 2 的证明】 当 $m=2$ 时, 由引理 2, 结论成立.

当 $m \geq 3$ 时, 分三种情况对棋盘进行分割:

如果 $m=3k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), 则将棋盘划分为 k 个 $3 \times m$ 棋盘; 如果 $m=3k+2$ ($k \in \mathbb{N}^*$), 则将棋盘划分为 k 个 $3 \times m$ 棋盘和一个半闭的 $2 \times m$ 棋盘; 如果 $m=3k+1$ ($k \in \mathbb{N}^*$), 则在 $m \times n$ 棋盘上、下方各划分出一个半闭的 $2 \times m$ 棋盘, 中间划分为 $k-1$ 个 $3 \times m$ 棋盘.

由引理 1、2, 每个 $3 \times m$ 棋盘及每个半闭的 $2 \times m$ 棋盘在饱和覆盖 P 中都至少有 $\frac{2}{3}$ 的格被骨牌覆盖, 于是整个 $m \times n$ 棋盘在饱和覆盖 P 中至少有 $\frac{2}{3}$ 的格被骨牌覆盖, 从而 $|P| \geq mn \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{mn}{3}$, 结论成立. $\square$

遗留的问题是, 其中等号能否达到? 我们猜想是可以的, 期望有兴趣的读者给出证明或否定.

此外, 我们在 [1] 中还证明了如下的结论:

定理 3. *设 P 是 $m \times n$ 方格棋盘相对于 $3-L$ 形的饱和覆盖, 则*

$$\frac{2[\frac{m}{2}][\frac{n}{2}]}{3} < |P|_{\min} \leq \frac{[\frac{m}{2}][\frac{n}{2}] + [1-(-1)^{mn}]}{2}.$$

我们期盼有读者能改进这一估计.

参考文献

[1] 冯跃峰. 棋盘上的组合数学 [M]. 上海: 上海教育出版社. 1998, 9.