数学新星问题征解

第二十五期 (2018.01)

主持: 牟晓生

第一题. 给定实数 $x_1,\dots,x_n,y_1,\dots,y_n$, 满足 $x_i^2+y_i^2=1,\forall i$. 求下列表达式

$$\sum_{1\le i<j\le n}\lambda_i\lambda_j(x_iy_j-x_jy_i)^2$$

在 $\lambda_1,\dots,\lambda_n\ge 0$, $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$ 时的最大值.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

第二题. 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 在直线 DC 上, 且 $AE\perp BC$; F 在直线 BC 上, 且 $AF\perp DC$. 以 BD 上任意点 I 为圆心, IA 为半径作圆, 与 AE,AF 分别交于 G,H. 过 G,H 的圆 I 的切线交于 J. 证明: J 在直线 EF 上.

(西安交大附中 金磊 供题)

第三题. 设 S 是正实数集, 满足以下两个条件:

(1) $1\in S$, 且 S 在加法与乘法下封闭;

(2) 存在 S 的子集 P, 使得 S 中任意不等于 1 的数都能唯一表示成 P 中若干数 (允许相同) 的乘积.

问: S 是否一定是正整数集?

(普林斯顿大学 郑凡 供题)

第四题. 设 $S_1,\dots,S_p,T_1,\dots,T_p$ 是 $\{1,\dots,N\}$ 的互异子集, 满足任意 S_i 与任意 T_j 的交集非空. 证明: $p<(3-\sqrt{5})\cdot 2^{N-1}$.

(IMO 2007 预选题 反向结论)