好题与妙解（六）

——2017 年新星秋季精品班两次测试题

冷岗松　吴尉迟　叶思

2017 年 11 月 19 日和 21 日, 上海数学新星秋季精品班举行了两次测试 (小考). 每次测试四道题, 时间为两个半小时. 本次介绍这两次测试试题的解答. 我们将用题 1.x 表示第 1 次测试的第 x 题, 题 2.y 的意义类似. 值得指出的是, 其中一些解法由长郡中学李帅, 巴蜀中学关典, 雅礼中学段钦瀚同学提供, 在此表示感谢.

I. 试 题

题 1.1 设 AB 是圆 $\odot O$ 的直径, CD 是 $\odot O$ 的一条垂直于 AB 的弦, E 是 CO 的中点, AE 与 $\odot O$ 交于 F, 线段 BC 与 AF, DF 分别交于 M, L, $\triangle DLM$ 的外接圆与 $\odot O$ 交于 K. 证明: $KM = MB$.

题 1.2 设 $n \geq 2$ 是给定的正整数, 对任意满足 $a_k \geq a_1 + \cdots + a_{k-1}$, $k = 2, \cdots, n$ 的正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 求
$$S = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$
的最大值.

题 1.3 设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个正整数序列, 使得对每一对正整数 m, n 有 $x_{mn} \neq x_{m(n+1)}$. 证明: 存在一个正整数 i 使得 $x_i \geq 2017$.

题 1.4 设 A 和 B 是两个有限集, 求满足下列性质的映射 f: $A \to A$ 的个数: 存在两个映射 g: $A \to B$ 和 h: $B \to A$ 使得
$$g(h(x)) = x, \forall\, x \in B \text{ 且 } h(g(x)) = f(x), \forall\, x \in A.$$

题 2.1 设 n 是正整数, $n \geq 2$, 证明:
$$\prod_{k=2}^{n} (1 + \frac{1}{2^k}) < 2.$$

收稿日期: 2017-12-05.

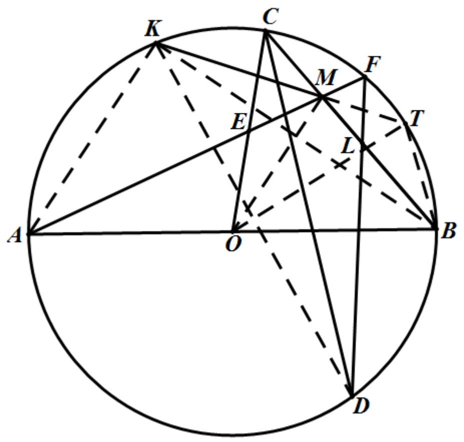
题 2.2 设 I 是非等腰 $\triangle ABC$ 的内心, 内切圆 $\odot I$ 与 BC, CA 的切点分别为 D, E, H 是 $\triangle ABI$ 的垂心, $K = AI \cap BH$, $L = BI \cap AH$. 证明: $\odot I$ 与 $\triangle DKH$ 的外接圆及 $\triangle ELH$ 的外接圆三圆共点.

题 2.3 已知 X 是一个有限集. $X = A_1 \cup \cdots \cup A_{10}$, $X = B_1 \cup \cdots \cup B_{10}$ 是满足如下性质的两个分划: 若 $A_i \cap B_j = \emptyset$, $1 \le i, j \le 10$, 则 $|A_i \cup B_j| \ge 10$. 求 $|X|$ 的最小值.

题 2.4 设 m 是一个给定的正整数, d 是它的一个正因子. 已知 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ 和 $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是两个由正整数构成的等差数列, 满足: 存在正整数 i, j, k, l 使得 $(a_i, b_j) = 1$, $(a_k, b_l) = m$. 证明: 存在正整数 t, s 使得 $(a_t, b_s) = d$.

II. 解 答

题 1.1 设 AB 是圆 $\odot O$ 的直径, CD 是 $\odot O$ 的一条垂直于 AB 的弦, E 是 CO 的中点, AE 与 $\odot O$ 交于 F, 线段 BC 与 AF, DF 分别交于 M, L, $\triangle DLM$ 的外接圆与 $\odot O$ 交于 K. 证明: $KM = MB$.



下面的解法属于湖南省长郡中学李帅同学. 他还指出题中的条件 $CD \perp AB$ 是多余的.

证明 延长 KM 交 $\odot O$ 于点 T, 连接 $AK, KD, MO, TM, TO, TB, BK$.

因为 D, K, M, L 四点共圆, 所以 $\angle CMK = \angle KDF$, 从而 $\overset{\frown}{KF} = \overset{\frown}{KC} + \overset{\frown}{TB}$, 因此 $\overset{\frown}{CF} = \overset{\frown}{BT}$, 故 $\overset{\frown}{CT} = \overset{\frown}{BF}$.

要证 $MK = MB$, 只需证 $MO \perp KB$, 即等价证明

$$\begin{aligned} MO \parallel AK &\Leftrightarrow \angle OMK = \angle AKM \Leftrightarrow \angle OMK = \angle ABT \\ &\Leftrightarrow O, M, T, B \text{ 四点共圆} \Leftrightarrow \angle OMB = \angle OTB \\ &\Leftrightarrow \angle OMB = \angle OBT \Leftrightarrow \angle OMB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AT} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{CT}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \angle OMB = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BF}) \Leftrightarrow \angle OMB = \angle AMC$$

$$\Leftrightarrow \triangle CME \backsim \triangle BMO \ (\text{因为} \angle OBM = \angle ECM).$$

对 $\triangle OBC$ 和截线 AEM 用 Menelaus 定理可知

$$\frac{CM}{MB} \cdot \frac{BA}{AO} \cdot \frac{OE}{EC} = 1.$$

所以 $\frac{CM}{BM} = \frac{1}{2} = \frac{CE}{BO}$, 又因为 $\angle OBM = \angle ECM$, 所以 $\triangle CME \backsim \triangle BMO$. □

评注 这个问题的难度超出我们的预期, 只有 32% 的同学做对此题. 此题图形较为复杂, 且三角和代数方法很难奏效, 对几何能力的要求很高. 遗憾的是命题者没有发现题中的条件 $CD \perp AB$ 是多余的. 事实上, 当 A, B, C, D 这四个点已经确定时, 点 E, F, M 也被唯一确定, 所以点 T 也唯一确定, 故点 K 也唯一确定 (可以发现, 点 K 的位置与点 D 无关).

题 1.2 设 $n \geq 2$ 是给定的正整数, 对任意满足 $a_k \geq a_1 + \cdots + a_{k-1}$, $k = 2, \cdots, n$ 的正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$, 求

$$S = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n}$$

的最大值.

解法一 满足要求的最大值是 $\frac{n}{2}$.

为了证明这个, 记 $A_k = a_1 + \cdots + a_k$, $k = 0, \cdots, n-1$, 并约定 $A_0 = a_0 = 0$. 由题意可知, $A_k \leq a_{k+1}$, $k = 0, \cdots, n-1$,

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{A_k - A_{k-1}}{a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n-2} A_k\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+2}}\right) + \frac{A_{n-1}}{a_n} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n-2} a_{k+1}\left(\frac{1}{a_{k+1}} - \frac{1}{a_{k+2}}\right) + 1 = \sum_{k=1}^{n-2}\left(1 - \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}}\right) + 1 \\
&= n - 1 + \frac{a_1}{a_2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} \\
&\leq n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{a_{k+1}} = n - S.
\end{aligned}$$

因此, $S \leq \frac{n}{2}$, 当 $a_k = 2^{k-2}a_1$, $k = 2, 3, \cdots, n$, 其中 $a_1 \in \mathbb{R}^+$ 时等号成立. 故 S 的最大值为 $\frac{n}{2}$. □

下面介绍重庆巴蜀中学关典同学证明 $S \leq \frac{n}{2}$ 的解法.

解法二 为证 $S \leq \frac{n}{2}$. 用归纳法证明更强一点的结论:

$$T_n = \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} + \frac{a_{n-1}}{a_1 + \cdots + a_{n-1}} \leq \frac{n}{2},\ n \geq 2.$$

$n=2$ 时, $T_n \le 1$ 显然成立.

$n=3$ 时, $T_3=\frac{a_1+a_2}{a_2}+\frac{a_2}{a_1+a_2}-1$, 令 $\frac{a_1+a_2}{a_2}=x$, 则 $x\in(1,2]$.

这时 $T_3=x+\frac{1}{x}-1\le 2+\frac{1}{2}-1=\frac{3}{2}$.

假设结论对 $n-1\ (n\ge 4)$ 成立, 即有 $T_{n-1}\le\frac{n-1}{2}$. 下考虑 n 的情况.

这时若能证明下面的不等式

$$\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{a_1+\cdots+a_{n-1}}\le\frac{a_{n-2}}{a_1+\cdots+a_{n-2}}+\frac{1}{2}, \tag{$*$}$$

则由归纳假设和 $(*)$ 知

$$\begin{aligned}T_n&=T_{n-2}+\frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}+\frac{a_{n-1}}{a_1+\cdots+a_{n-1}}\\&\le T_{n-2}+\frac{a_{n-2}}{a_1+\cdots+a_{n-2}}+\frac{1}{2}\\&=T_{n-1}+\frac{1}{2}\le\frac{n-1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{n}{2},\end{aligned}$$

这说明结论对 n 成立.

下证 $(*)$.

注意到 $(*)$ 等价于

$$\frac{a_{n-2}(a_1+\cdots+a_{n-1})+a_{n-1}^2}{a_{n-1}(a_1+\cdots+a_{n-1})}\le\frac{2a_{n-2}+a_1+\cdots+a_{n-2}}{2(a_1+\cdots+a_{n-2})}.$$

记 $A=a_1+\cdots+a_{n-2}$, 则上式等价于

$$\begin{aligned}&2a_{n-2}A^2+2a_{n-2}a_{n-1}A+2Aa_{n-1}^2\\&\le(2a_{n-2}+A)a_{n-1}^2+(2a_{n-1}+A)Aa_{n-1},\end{aligned}$$

即

$$(2a_{n-2}-A)a_{n-1}^2+A^2a_{n-1}\ge 2a_{n-1}A^2.$$

下证上式成立:

由条件知 $a_{n-1}\ge A$, $2a_{n-2}-A\ge 0$. 故

$$(2a_{n-2}-A)a_{n-1}^2+A^2a_{n-1}\ge(2a_{n-2}-A)A^2+A^2\cdot A=2a_{n-2}A^2.$$

故 $(*)$ 得证. □

评注 此题难度超过我们的预期, 仅有 15% 的同学做对. 上述解法 1 的要点是首先运用 Abel 变换进行恒等变形, 但变形后的式子不能直接求最大值, 而是要用条件将它放缩为含 S 的代数式. 上述解法 2 的要点是不能直接对 S 用归纳法 (因为并不能断定 $\frac{a_{n-1}}{a_n}\le\frac{1}{2}$, 用归纳假设得到的结果弱于结论), 而要采用加强的归纳法, 即转而证明更强一点的结果 $T_n\le\frac{n}{2}$. 这样便将问题转化为证明 $(*)$

式. $(*)$ 式的证明如果处理不当会相当繁琐, 但如果将 a_{n-1} 看作主变元, 将它转化为关于 a_{n-1} 的二次不等式就不难处理了. 有多位同学采用上述加强归纳法来证明本题.

题 1.3 设 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是一个正整数序列, 使得对每一对正整数 m, n 有 $x_{mn} \neq x_{m(n+1)}$. 证明: 存在一个正整数 i 使得 $x_i \geq 2017$.

证明 我们称正整数 $i < j$ 是"连通的", 若存在正整数 m, n 使得 $i = mn$, $j = m(n+1)$. 由题设知, 若 i, j 是连通的, 则 $x_i \neq x_j$.

为证结论, 只需证 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 中有 2017 个不同的项. 为此, 只需证明存在 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 的一个子序列 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_{2017}}$ 使得 $i_1, \cdots, i_{2017}$ 中的任何两项均是连通的.

下面, 我们用归纳方法证明更一般的结论: 对任意正整数 $k \geq 2$, 正整数集 $\mathbb{N}^*$ 中能选出 k 个不同的正整数 $i_1, \cdots, i_k$ 使得其中任两项均是连通的.

$k = 2$ 时, 结论显然成立.

假设结论对 k 成立, 即存在两两连通的 k 个正整数 $i_1, i_2, \cdots, i_k$. 现考虑 $k + 1$ 的情况.

注意到对任意正整数 $i < j$, i, j 是连通的当且仅当 $j - i \mid i$. 这样如果 i, j 是连通的, 则对任意满足 $i \mid a$ 的正整数 a 有 $a + i$ 与 $a + j$ 也是连通的.

现记 $A = i_1 i_2 \cdots i_k$, 则由归纳假设知下面的 $k+1$ 个数: $A, A+i_1, \cdots, A+i_k$ 中的任何两项均是连通的. 这说明结论对 $k + 1$ 成立. □

评注 此题是一个难度适中的问题. 它本质上可转化为下面问题: 对任给的正整数 k, 存在 $\mathbb{N}^*$ 的一个 k 元子集 S 满足对 S 中的任意两个元 $i < j$ 有 $j - i \mid i$.

这使我们联想到早年一个十分类似的问题, 处理手法也一样. 它是 1998 年 USAMO 的问题: 对任给正整数 k, 存在 $\mathbb{N}^*$ 的一个 k 元子集 S 使得对任意 $i, j \in S$, $i \neq j$ 有 $(j - i)^2 \mid ij$.

这类存在性为题用归纳构造方法处理十分有效. 注意到除式是差的形式, 因此我们在归纳假设的基础上利用平移变化来进行构造, 当然选择好平移量是一个关键.

题 1.4 设 A 和 B 是两个有限集, 求满足下列性质的映射 f: $A \to A$ 的个数: 存在两个映射 g: $A \to B$ 和 h: $B \to A$ 使得

$$g(h(x)) = x, \forall\, x \in B \text{ 且 } h(g(x)) = f(x), \forall\, x \in A.$$

解 答案为 $\binom{|A|}{|B|}|B|^{|A|-|B|}$.

由 $g(h(x))=x, \forall\, x\in B$ 知 h 是单射, g 是满射, 从而 $|B|\le|A|$.

由 $h(g(x))=f(x), \forall\, x\in A$ 成立知 f 值域是 $h(B)=\{h(x):x\in B\}$.

注意到

$$f(h(x))=h(g(h(x)))=h(x), \forall\, x\in B,$$

故 f 可以表示成如下形式

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in h(B) \\ \varphi(x), & x\in A\setminus h(B) \end{cases},$$

其中 φ 是 $A\setminus h(B)\to h(B)$ 的任一映射.

下面说明所有能表示成下形式的 f 一定存在映射 g: $A\to B$ 和 h: $B\to A$ 满足条件:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in A'\subset A, |A'|=|B| \\ \varphi(x), & x\in A\setminus A' \end{cases}, \tag{$*$}$$

其中 φ 是 $A\setminus A'\to A'$ 的任一映射.

取 $B\to A'$ 上的一个一一映射 $l(x)$.

事实上, 设 $h_1(x)$ 是 $A'\to A'$ 上的恒同映射, 令

$$h:B\to A'\subset A:\ \ h(x)=h_1(l(x))=l(x),\ \ \forall\, x\in B.$$

再取映射 $g_1:A\to A'$:

$$g_1(x)=\begin{cases} x, & x\in A' \\ \varphi(x), & x\in A\setminus A' \end{cases},$$

令映射 $g:A\to B:g(x)=l^{-1}(g_1(x)), \forall\, x\in A$.

易证 $g(h(x))=x$, $x\in B$ 且 $h(g(x))=f(x), \forall\, x\in A$.

又 $(*)$ 式的 A' 的选取有 $\binom{|A|}{|B|}$ 种方法, 而 $\varphi(x)$ 的选取有 $|B|^{|A|-|B|}$ 种方法, 故形如 $(*)$ 式的 f 的个数为 $\binom{|A|}{|B|}|B|^{|A|-|B|}$ 个, 这也是满足条件的 f 的个数. $\square$

评注 此题是一个难题. 仅有 2.8% 的人完全做对此题.

有几位学生将 $f(x)$ 写成如下形式

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in h(B) \\ \varphi(x), & x\in A\setminus h(B) \end{cases},$$

其中 φ 是 $A\setminus h(B)\to A$ 的任一映射, 从而断定这样的 f 个数为 $\binom{|A|}{|B|}|A|^{|A|-|B|}$,

这是错误的, 其原因是忽略了讨论 $f(x)$ 的值域.

另外, 此题学生常犯的另一个错误是, 发现了 $f(x)$ 具有的形式后便马上给出 f 的计算结果, 便解毕. 事实上, 我们还需要证明具有形式 $(*)$ 的 f 一定可以找到满足要求的 g 和 h, 这是严谨性的基本要求.

题 2.1 设 n 是正整数, $n \geq 2$, 证明:

$$\prod_{k=2}^{n}(1+\frac{1}{2^k}) < 2.$$

证明 注意到对 $0<x<1$ 有 $1+x<\frac{1}{1-x}$. 故

$$\prod_{k=2}^{n}(1+\frac{1}{2^k}) < \frac{1}{\prod\limits_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{2^k})}. \tag{1}$$

由 Bernoulli 不等式

$$\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{2^k}) \geq 1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k} > 1-\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

综合 (1), (2) 立得结论. □

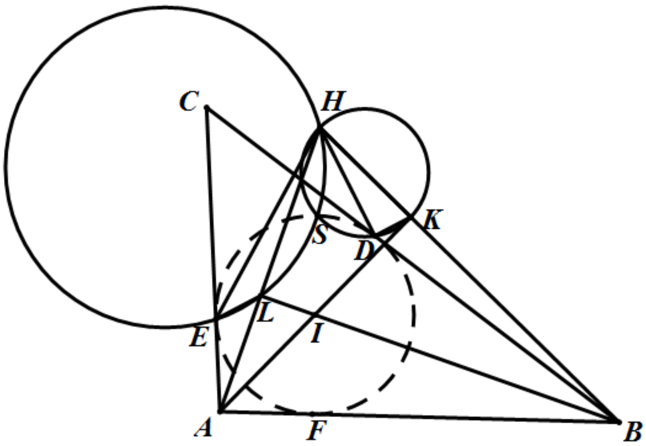
评注 此题为简单题, 大多数学生做对了此题.

i) 上面的解法的关键是如何利用 Bernoulli 不等式, 因此 (1) 式的转换是必要的.

ii) 不少学生用加强归纳的方法证明 $\prod\limits_{k=2}^{n}(1+\frac{1}{2^k}) < 2-\frac{1}{2^{n-2}}$.

iii) 此题还可以用著名的分析不等式: $\ln(1+x)<x, \forall\, x\in(0,\infty)$ 来证明.

题 2.2 设 I 是非等腰 $\triangle ABC$ 的内心, 内切圆 $\odot I$ 与 BC, CA 的切点分别为 D, E, H 是 $\triangle ABI$ 的垂心, $K=AI\cap BH$, $L=BI\cap AH$. 证明: $\odot I$ 与 $\triangle DKH$ 的外接圆及 $\triangle ELH$ 的外接圆三圆共点.



证明 由条件可知, $\angle IDB = 90^\circ = \angle IKB$, 所以 B, K, D, I 四点共圆. 又 $\angle ALB = 90^\circ = \angle AKB$, 所以 B, K, L, A 四点也共圆. 因此

$$\begin{aligned}\angle BKD &= 180^\circ - \angle BID = 180^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC) \\ &= 180^\circ - \angle BAL = \angle BKL.\end{aligned}$$

因此, K, D, L 共线.

由 A, E, L, I 四点共圆 ($\angle AEI = \angle ALI = 90^\circ$) 有

$$\begin{aligned}\angle ALE = \angle AIE &= 90^\circ - \frac{1}{2}\angle CAB \\ &= 90^\circ - \angle BAI = 90^\circ - \angle BAK \\ &= \angle ABK.\end{aligned}$$

又由 L, A, B, K 四点共圆知, $\angle ABK = 180^\circ - \angle ALK$. 所以 K, E, L 共线. 故 K, D, E, L 四点共线.

设 S 是 $\triangle DKH$ 外接圆和 $\triangle ELH$ 外接圆的第二个交点. 则

$$\begin{aligned}\angle DSE &= 360^\circ - \angle DSH - \angle HSE = \angle DKH + 180^\circ - \angle HLE \\ &= \angle LKH + \angle HLK = 180^\circ - \angle KHL.\end{aligned}$$

又 H, L, I, K 四点共圆, 故

$$\begin{aligned}180^\circ - \angle KHL = \angle KIL = \angle AIB &= 180^\circ - \angle IBA - \angle IAB \\ &= 180^\circ - \frac{1}{2}\angle CBA - \frac{1}{2}\angle CAB.\end{aligned}$$

所以

$$\angle DSE = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle CBA - \frac{1}{2}\angle CAB.$$

另一方面, 设内切圆 $\odot I$ 与边 AB 切于点 F. 则 A, F, I, E 及 B, F, I, D 分别四点共圆. 因此

$$\begin{aligned}\angle DFE &= \angle DFI + \angle IFE = \angle DBI + \angle IAE \\ &= \frac{1}{2}\angle CBA + \frac{1}{2}\angle CAB.\end{aligned}$$

故

$$\angle DFE + \angle DSE = 180^\circ.$$

这说明 S 在 $\triangle DEF$ 的外接圆上, 即为 $\triangle ABC$ 的内切圆上一点.

这就证明了 $\odot I$ 与 $\triangle DKH$ 的外接圆及 $\triangle ELH$ 的外接圆共点 S. $\square$

评注 此题难度不大, 上面的解法利用导角得到了 E, L, D, K 四点共线, 进而由角的关系得到结果. 事实上, H, S, I, F 也是四点共线的.

题 2.3 已知 X 是一个有限集. $X = A_1 \cup \cdots \cup A_{10}$, $X = B_1 \cup \cdots \cup B_{10}$ 是满足如下性质的两个分划: 若 $A_i \cap B_j = \emptyset$, $1 \le i, j \le 10$, 则 $|A_i \cup B_j| \ge 10$. 求 $|X|$ 的最小值.

解 $|X|$ 的最小值为 50.

我们先证明 $|X| \ge 50$.

考虑集合 $A_1, \cdots, A_{10}$, $B_1, \cdots, B_{10}$ 中元素个数最少的集合, 不妨设为 A_1. 记 $|A_1| = a$, 则 A_1 至多与 $B_1, \cdots, B_{10}$ 中 a 个集合相交. 不妨设

$$|A_1 \cap B_i| \ne \emptyset,\ i = 1, \cdots, k \text{ 且 } A_1 \cap B_i = \emptyset,\ i = k+1, \cdots, 10,$$

其中 $k \le a$. 故 $|A_1 \cup B_i| \ge 10$, $i = k+1, \cdots, 10$. 从而对 $\forall\, i \ge k+1$ 有 $|B_i| \ge 10 - |A_1| = 10 - a$. 由 $|A_1|$ 的最小性知 $B_1, \ldots, B_k$ 的元素个数均不小于 5. 从而

$$\begin{aligned}|X| &= |B_1 \cup \cdots \cup B_{10}| = |B_1| + \cdots + |B_k| + |B_{k+1}| + \cdots + |B_{10}| \\ &\ge k \cdot a + (10-k)(10-a) = 50 + 2 \cdot (5-k)(5-a).\end{aligned}$$

i) 若 $a \le 5$, 则 $k \le 5$, 此时由上式知 $|X| \ge 50$;

ii) 若 $a > 5$, 由 A_1 是 $A_1, \cdots, A_{10}$ 中元素个数最少的集合知 $|X| \ge 10a > 50$.

故 $|X| \ge 50$.

另一方面, $|X|$ 能取到 50, 例如, 取

$$\begin{aligned}A_1 &= B_1 = \{1,2,3,4,5\}, A_2 = B_2 = \{6,7,8,9,10\}, \\ &\cdots,\ A_{10} = B_{10} = \{46,47,48,49,50\}.\end{aligned}$$

显然它们满足条件, 这时 $X = \{1, 2, \cdots, 50\}$. □

评注 由题设知,若 $A_i \cap B_j = \emptyset$, 则 $|B_j| \ge 10 - |A_i|$, 这个不等式可以估计与 A_i 不相交的 B_j 的元素个数的下界. 因而自然想到用极端原理来估计余下的 B_j.

题 2.4 设 m 是一个给定的正整数, d 是它的一个正因子. 已知 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ 和 $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ 是两个由正整数构成的等差数列, 满足: 存在正整数 i, j, k, l 使得 $(a_i, b_j) = 1$, $(a_k, b_l) = m$. 证明: 存在正整数 t, s 使得 $(a_t, b_s) = d$.

证法一 注意到 m 可逐次除以它们若干素因子得到 d, 这样只需证对 m 的任意素因子 p, 存在正整数 α, β 使得 $(a_\alpha, b_\beta) = \frac{m}{p}$.

由于 $(a_k,b_l)=m$. 故 $\frac{a_k}{p}$, $\frac{b_l}{p}$ 必有一项不能被 m 整除. 不妨设 $\frac{a_k}{p}$ 不能被 m 整除.

设等差数列 $\{a_i\}$, $\{b_j\}$ 的公差分别为 u,v, 则 $a_i=a_0+iu$, $b_j=b_0+jv$.

下分两种情况:

1) 若 $p\nmid v$. 令 $\alpha=k$, $\beta=l+\frac{a_k}{p}$. 这时 $b_\beta=b_l+\frac{a_kv}{p}$.

注意到 $\frac{m}{p}\mid a_k$, $\frac{m}{p}\mid b_\beta$, 又 $p\nmid v$ 且 $m\nmid\frac{a_k}{p}$, 所以 $m\nmid b_\beta$. 这说明 $\frac{m}{p}$ 是 a_α,b_β 的公因子, 且 m 不是它们的公因子.

若 a_α,b_β 存在不同于 p 的素公因子 q, 则 $q\mid a_\alpha$, $q\mid b_\beta$, $q\mid\frac{a_\alpha}{p}$. 故 $q\mid(a_\alpha,b_\beta-\frac{a_\alpha}{p}v)$, 即 $q\mid(a_k,b_l)=m$. 又 $p\nmid q$, 故 $q\mid\frac{m}{p}$.

故 $(a_\alpha,b_\beta)=\frac{m}{p}$.

2) 若 $p\mid v$. 先证 $p\nmid u$ $(*)$.

事实上, 假设 $p\mid u$, 由 $(a_k,b_l)=m$ 知 $p\mid a_k-ku=a_0$, $p\mid b_l-lu=b_0$. 因此 $p\mid a_i$, $p\mid b_j$, 这与 $(a_i,b_j)=1$ 矛盾! 故 $(*)$ 得证.

取正整数 s, 使得 $\frac{b_l}{p^s}$ 能被 $\frac{m}{p}$ 整除, 但不能被 m 整除.

令 $\alpha=k+\frac{b_l}{p^s}$, $\beta=l$. 这时 $a_\alpha=a_k+\frac{b_l}{p^s}u$, $b_\beta=b_l$.

注意到 $\frac{m}{p}\mid a_k$, $\frac{m}{p}\mid b_l$, $\frac{m}{p}\mid\frac{b_l}{p^s}$, 所以 $\frac{m}{p}$ 是 a_α 与 b_β 的公因子. 又 $m\nmid\frac{b_l}{p^s}$, 且 $p\nmid u$, 所以 $m\nmid a_\alpha$, 从而 m 不是 a_α, b_β 的公因子.

设素数 q 是 a_α, b_β 不同于 p 的公因子, 则 $q\mid b_\beta$, $q\mid(a_\alpha-\frac{b_l}{p^s}u)=a_k$. 即 $q\mid(a_k,b_l)=m$. 又 $q\neq p$, 所以 $q\mid\frac{m}{p}$.

这说明 $(a_\alpha,b_\beta)=\frac{m}{p}$.

由 1) , 2) 知结论成立. □

证法二 (雅礼中学段钦瀚)

设 $a_n=a_0+nd_1,b_n=b_0+nd_2$.

注意到 m 可以连续除以它的若干素因子得到 d, 故只需证明对 m 的任一素因子 p, 存在正整数 t,s 使得 $(a_t,b_s)=\frac{m}{p}$.

先证明如下引理:

引理 设 $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, 若 $(a,b)=1$, 则存在 $n\in\mathbb{N}^*$, 使得 $(an+b,c)=1$.

引理证明 任取素数 $q\mid c$, 若 $q\mid a$, 令 $n_q=1$; 若 $q\nmid a$, 任取 $n_q\not\equiv-\frac{b}{a}\pmod q$.

从而当 $n\equiv n_q\pmod q$ 时,有 $q\not\equiv an+b$. 当 q 遍历 c 的所有素因子时, 由中国剩余定理, 这样的 $n\in\mathbb{N}^*$ 是存在的, 故 $(an+b,c)=1$.

回到原题. 令 $m=pd$. 因为 $(a_k,b_l)=m$, 故可设 $a_k=pdx,b_l=pdy$, 则有 $(x,y)=1$.

因为 $(a_i,b_j)=1$, 故 $p\nmid a_i$ 或 $p\nmid b_j$. 不妨设 $p\nmid a_i$, 则 $p\nmid a_k-a_i$. 所以 $p\nmid(k-i)d_1$, 从而有 $p\nmid d_1$.

设 $r=(d_1,x)$, 又由于 $p\nmid d_1,(x,y)=1$, 故 $(r,py)=1$, 由于 $(\frac{d_1}{r},\frac{x}{r})=1$, 所以 $(\frac{d_1}{r},\frac{px}{r})=1$.

在引理中取 $a=\frac{d_1}{r},b=\frac{px}{r},c=py$, 则 $(a,b)=1$. 故存在 $n\in\mathbb{N}^*$, 使得 $(an+b,c)=1$. 从而 $(\frac{d_1}{r}n+\frac{px}{r},py)=1$. 又 $(r,py)=1$, 故 $(d_1n+px,py)=1$.

令 $t=k+nd,s=l$, 从而有 $a_t=a_k+ndd_1=d(d_1n+px),b_s=dpy$, 此时有

$$(a_t,b_s)=d(d_1n+px,py)=d.$$

命题得证. □

评注 证明一和证明二都证明了等价的命题, 即只需证 p 是素数的情形. 不同的是, 证明一采用分类直接构造的方法; 证明二的要点是要证存在 $n\in\mathbb{N}^*$, 使得 $(d_1n+px,py)=1$, 故想到用中国剩余定理去证明引理.