# 2017 年中国西部数学邀请赛试题与解答

邹瑾

**1.** 已知素数 $p$ 和正整数 $n$ 满足: $\prod_{k=1}^{n}(k^2+1)$ 能被 $p^2$ 整除. 求证: $p<2n$.

(王广廷 供题)

**证明** 按照 $\prod_{k=1}^{n}(k^2+1)$ 中的因子所含 $p$ 的幂次分情况讨论:

(1) 若存在 $k$ $(1\le k\le n)$, 使得 $p^2\mid k^2+1$. 则 $p^2\le n^2+1$, 即

$$p\le\sqrt{n^2+1}<2n.$$

(2) 若对任意的 $k$ $(1\le k\le n)$, $k^2+1$ 不能被 $p^2$ 整除. 由条件, 知存在 $1\le j\ne k\le n$, 使得 $p\mid(j^2+1)$ 且 $p\mid(k^2+1)$. 则 $p\mid(k^2-j^2)$, 即 $p\mid(k-j)(k+j)$.

① 若 $p\mid(k-j)$, 则 $p\le k-j\le n-1<2n$;

② 若 $p\mid(k+j)$, 则 $p\le k+j\le n+n-1=2n-1<2n$.

综上可知, $p<2n$. □

**评注** 这个问题刚开始给出的条件是 $\prod_{k=1}^{n}(k^3+1)$ 能被 $p^2$ 整除, 让参赛同学证明 $p<2n$. 经过命题组讨论, 基于如下两个方面的考虑将条件 $\prod_{k=1}^{n}(k^3+1)$ 改为 $\prod_{k=1}^{n}(k^2+1)$: 一是作为第一题要降低难度, 二是数论中讨论 $n^2+1$ 的因子的问题较多见, 给参赛选手一种亲切感. 其实这两个条件的差别仅仅在于多进行了一次因式分解, 也就是要用到立方和公式.

**2.** 设 $n$ 是一个正整数, 使得存在正整数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足

$$x_1x_2\cdots x_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)=100n,$$

求 $n$ 的最大可能值.

(邹瑾 供题)

**解** $n$ 的最大可能值为 9702.

收稿日期: 2017-08-16.

由已知, $x_1x_2\cdots x_n(x_1+x_2+\cdots+x_n)=100n$.

显然 $x_1+x_2+\cdots+x_n\geq 1+1+\cdots+1=n$, 故 $x_1x_2\cdots x_n\leq 100$. 显然等号无法成立, 故 $x_1x_2\cdots x_n\leq 99$. 而

$$\begin{aligned}x_1x_2\cdots x_n&=[(x_1-1)+1][(x_2-1)+1]\cdots[(x_n-1)+1]\\&\geq (x_1-1)+(x_2-1)+\cdots+(x_n-1)+1\\&=x_1+x_2+\cdots+x_n-n+1,\end{aligned}$$

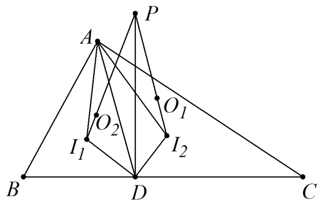
故

$$x_1+x_2+\cdots+x_n\leq x_1x_2\cdots x_n+n-1\leq n-98.$$

于是 $99(n-98)\geq 100n$, 解得 $n\leq 99\times 98=9702$.

此时取 $x_1=99$, $x_2=x_3=\cdots=x_{9702}=1$ 可使等号成立. □

**3.** 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $D$ 为边 $BC$ 上一点, 设 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACD$ 的内心分别为 $I_1$ 和 $I_2$, $\triangle AI_1D$ 和 $\triangle AI_2D$ 的外心分别为 $O_1$ 和 $O_2$, 直线 $I_1O_2$ 与 $I_2O_1$ 交于点 $P$. 求证: $PD\perp BC$.



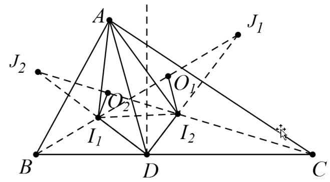

(张端阳 供题)

**证明** 因为 $O_1A=O_1I_1=O_1D$, 所以由内心的性质, $O_1$ 是 $\triangle ABD$ 外接圆弧 $AD$ 的中点. 延长 $BI_1, DI_2$ 交于点 $J_1$, 则 $J_1$ 是 $\triangle ABD$ 角 $B$ 内的旁心, 且 $O_1$ 是 $I_1J_1$ 的中点. 同理, 延长 $DI_1, CI_2$ 交于点 $J_2$, 则 $J_2$ 是 $\triangle ACD$ 角 $C$ 内的旁心, 且 $O_2$ 是 $I_2J_2$ 的中点.

过 $D$ 作 $DP'\perp BC$, 只需证明 $I_1O_2, I_2O_1, DP'$ 三线共点. 对 $\triangle DI_1I_2$ 用角元塞瓦定理知, 只需证明

$$\frac{\sin\angle P'DI_2}{\sin\angle P'DI_1}\cdot\frac{\sin\angle DI_1O_2}{\sin\angle O_2I_1I_2}\cdot\frac{\sin\angle O_1I_2I_1}{\sin\angle DI_2O_1}=1.$$

事实上, 由 $O_2J_2=O_2I_2$ 知 $S_{\triangle O_2I_1J_2}=S_{\triangle O_2I_1I_2}$, 所以



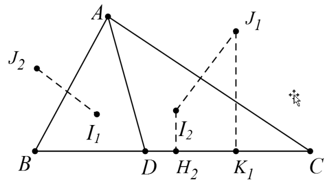

$$\frac{\sin\angle DI_1O_2}{\sin\angle O_2I_1I_2}=\frac{\sin\angle O_2I_1J_2}{\sin\angle O_2I_1I_2}=\frac{\frac{2S_{\triangle O_2I_1J_2}}{I_1J_2\cdot I_1O_2}}{\frac{2S_{\triangle O_2I_1I_2}}{I_1I_2\cdot I_1O_2}}=\frac{I_1I_2}{I_1J_2}.$$

同理, $\frac{\sin\angle O_1I_2I_1}{\sin\angle DI_2O_1}=\frac{I_2J_1}{I_1I_2}$. 又 $\frac{\sin\angle P'DI_2}{\sin\angle P'DI_1}=\frac{\cos\angle CDI_2}{\cos\angle BDI_1}$, 所以只需证明

$$\frac{I_2J_1\cdot\cos\angle CDI_2}{I_1J_2\cdot\cos\angle BDI_1}=1,$$

即 $I_2J_1$ 和 $I_1J_2$ 在 $BC$ 上的投影长度相同.

设 $I_1, I_2, J_1, J_2$ 在 $BC$ 上的投影分别为 $H_1, H_2, K_1, K_2$, 则

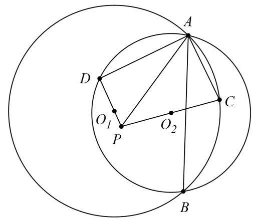



$$\begin{aligned}H_2K_1 &= DK_1 - DH_2\\ &= \frac{1}{2}(AB + AD - BD) - \frac{1}{2}(AD + CD - AC)\\ &= \frac{1}{2}(AB + AC - BC),\end{aligned}$$

同理, $H_1K_2 = \frac{1}{2}(AB + AC - BC)$. 所以 $H_2K_1 = H_1K_2$, 命题得证. □

**评注** 本题有如下的等价形式:

如图, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 交于 $A, B$ 两点, 过 $A$ 作两条垂直的射线分别与 $\odot O_1, \odot O_2$ 交于点 $C, D$. 设直线 $DO_1, CO_2$ 交于点 $P$, 则 $\angle PAD = \angle BAC$.




读者可自行证明这两种形式的等价性.

**4.** 给定整数 $n, k$, $n \geq k \geq 2$. 甲、乙两人在一张每个小方格都是白色的 $n \times n$ 的方格纸上玩游戏: 两人轮流选择一个白色小方格将其染为黑色, 甲先进行. 如果某个人染色后, 每个 $k \times k$ 的正方形中都至少有一个黑色小方格, 则游戏结束, 此人获胜. 问谁有必胜策略?

(瞿振华 供题)

**解** 将方格纸按从上到下标记行, 从左到右标记列.

若 $n \leq 2k-1$, 则甲将第 $k$ 行第 $k$ 列的小方格染为黑色后, 每个 $k \times k$ 正方形中至少有一个黑格, 因此甲获胜.

下面假设 $n \geq 2k$. 我们证明当 $n$ 是奇数时, 甲有获胜策略: 当 $n$ 是偶数时, 乙有获胜策略.

对于一个已经有若干个方格染为黑色的局面: 如果有两个不相交的 $k \times k$ 正方形所含的全是白格, 并且方格纸内白格总数为奇数, 我们称其为“好局面”; 如果有两个不相交的 $k \times k$ 正方形所含的全是白格, 并且方格纸内白格总数为偶数, 称其为“坏局面”.

我们证明当某人面对好局面时, 他有获胜策略.

假设甲面对好局面, 他先取定两个不相交的 $k \times k$ 正方形 $A$ 和 $B$, 其中都是白格. 由于白格总数为奇数, 可选取不在 $A, B$ 中的另一个白格, 将它染为黑色, 此时白格总数为偶数, 且 $A, B$ 中仍然都是白格, 因此变为一个坏局面.

轮到乙面对坏局面, 如果他染色后, 仍有两个不相交的 $k \times k$ 正方形中都是白格, 此时白格总数是奇数, 又回到好局面. 如果他染色后, 不存在两个

不相交的 $k\times k$ 正方形, 注意到此时至少有一个全白格的 $k\times k$ 正方形, 设 $A_1,\cdots,A_m$ 是所有全白格的 $k\times k$ 正方形, 则它们两两相交, 故必包含于某个 $(2k-1)\times(2k-1)$ 的正方形 $S$, 因此 $S$ 的中心方格 $P$ 是 $A_1,\cdots,A_m$ 的公共格. 这样甲将 $P$ 染为黑色后, 所有 $k\times k$ 正方形中都含有黑格, 于是甲获胜.

总之, 当某人面对好局面时, 他可以在自己的下一回合获胜或是仍面对好局面, 而游戏必在有限步内结束, 因此他有获胜策略. 由上述论证亦可知, 当某人面对坏局面时, 他要么让对方下一回合即可获胜, 要么留给对方好局面, 因此对方有获胜策略. 在 $n\geq 2k$ 时, 由于四个角上的 $k\times k$ 正方形互不相交, 且一开始都是白格, 因此当 $n$ 是奇数时, 一开始是好局面, 甲有获胜策略; 当 $n$ 是偶数时, 一开始是坏局面, 乙有获胜策略. $\square$

**5.** 设 9 个正整数 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ (可以相同), 满足: 对任意 $1\leq i<j<k\leq 9$, 都存在与 $i,j,k$ 不同的 $l$, $1\leq l\leq 9$, 使得 $a_i+a_j+a_k+a_l=100$. 求满足上述要求的有序 9 元数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$ 的个数.

(何忆捷 供题)

**解** 对满足条件的正整数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$, 将 $a_1,a_2,\cdots,a_9$ 从小到大排列为 $b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_9$. 由条件知, 分别存在 $l\in\{4,5,\cdots,9\}$ 及 $l'\in\{1,2,\cdots,6\}$, 使得

$$b_1+b_2+b_3+b_l=b_{l'}+b_7+b_8+b_9=100. \qquad ①$$

注意到

$$b_{l'}\geq b_1,\ \ b_7\geq b_2,\ \ b_8\geq b_3,\ \ b_9\geq b_l, \qquad ②$$

结合 ① 知, ② 中的不等号均为等号, 故 $b_2=b_3=\cdots=b_8$.

因此可设 $(b_1,b_2,\cdots,b_9)=(x,y\cdots,y,z)$, 其中 $x\leq y\leq z$.

由条件知, 使 $x+y+z+b_l=100$ 的 $b_l$ 的值只能是 $y$, 即

$$x+2y+z=100. \qquad ③$$

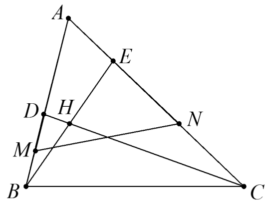
(1) 当 $x=y=z=25$ 时, 有 $(b_1,b_2,\cdots,b_9)=(25,25,\cdots,25)$, 此时得到一组 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$.

(2) 当 $x,z$ 中恰有一个等于 $y$ 时, 记另一个为 $w$, 由 ③ 知 $w+3y=100$. 该条件也是充分的. 此时 $y$ 可以取 $1,2,\cdots,24,26,27,\cdots,33$ 这 32 种不同值, 每个 $y$ 值对应一组 $(b_1,b_2,\cdots,b_9)$, 进而对应 9 组不同的 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$, 共有 $32\times 9=288$ 个数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$.

(3) 当 $x<y<z$ 时, 由条件知, 存在某个 $b_l \in \{x,y,z\}$, 使得 $3y+b_l=100$, 与 ③ 比较知, $y+b_l=x+z$, 故必有 $b_l=y$, 进而 $y=25$, $x+z=50$. 该条件也是充分的. 此时, 对 $x=1,2,\cdots,24$, 每个 $x$ 值对应一组 $(b_1,b_2,\cdots,b_9)$, 进而对应 $9\times 8=72$ 组不同的 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$, 共有 $24\times 72=1728$ 个数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_9)$.

综合 (1), (2), (3) 知, 符合条件的数组个数是 $1+288+1728=2017$. □

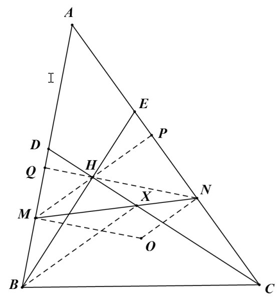
**6.** 如图, 在锐角 $\triangle ABC$ 中, 点 $D$、$E$ 分别在边 $AB$、$AC$ 上, 线段 $BE$、$DC$ 交于点 $H$, 点 $M$、$N$ 分别为线段 $BD$、$CE$ 的中点. 证明: 点 $H$ 为 $\triangle AMN$ 的垂心的充要条件是 $B$、$C$、$E$、$D$ 四点共圆且 $BE\perp CD$.




(石泽晖 供题)

**证明** 延长 $MH$ 交 $AC$ 于点 $P$, 延长 $NH$ 交 $AB$ 于点 $Q$.

先证明充分性: 由于 $B$、$C$、$E$、$D$ 四点共圆, 故 $\angle BDH=\angle CEH$. 又 $BE\perp CD$, 从而 $\triangle DHB$、$\triangle EHC$ 均为直角三角形, 注意到点 $M$、$N$ 分别为斜边 $BD$、$CE$ 的中点, 故 $\angle MDH=\angle MHD$, $\angle MHB=\angle MBH$. 从而




$$\begin{aligned}\angle EHP+\angle HEC&=\angle MHB+\angle HDB\\&=\angle MBH+\angle HDB=90^\circ,\end{aligned}$$

即 $MH\perp AC$. 同理 $NH\perp AB$, 从而点 $H$ 为 $\triangle AMN$ 的垂心.

再证明必要性: 若点 $H$ 为 $\triangle AMN$ 的垂心, 则 $MP\perp AN$, $NQ\perp AM$, 从而

$$\frac{DQ}{QB}=\frac{DH\cdot\sin\angle DHQ}{BH\cdot\angle BHQ}=\frac{DH\cdot\sin\angle CHN}{BH\cdot\sin\angle EHN}=\frac{DH\cdot EH}{BH\cdot CH}.$$

同理 $\frac{EP}{PC}=\frac{DH\cdot EH}{BH\cdot CH}$, 故 $\frac{EP}{PC}=\frac{DQ}{QB}$. 利用比例性质及 $DM=MB$, $EN=NC$ 可知:

$$\frac{EC}{PC}=\frac{DB}{QB}\Rightarrow\frac{NC}{PC}=\frac{MB}{QB}\Rightarrow\frac{NC}{PN}=\frac{MB}{QM}\Rightarrow\frac{EN}{PN}=\frac{DM}{QM}.$$

又因为点 $H$ 为 $\triangle AMN$ 的垂心, 故 $\angle DMH=\angle ENH$, 从而有 $\frac{QM}{MH}=\frac{PN}{NH}$, 因此 $\frac{DM}{MH}=\frac{EN}{NH}$, 从而 $\triangle DMH\backsim\triangle ENH$, 故 $\angle MDH=\angle NEH$, 因此 $B$、$C$、$E$、$D$ 四点共圆.

设 $BCED$ 的外心为 $O$, 易知 $OM\perp AB$, 从而 $OM\parallel NH$, 同理 $ON\parallel MH$, 故四边形 $MHNO$ 为平行四边形, 因此 $MH=ON$. 过点 $B$ 作 $MH$ 平行线交 $DC$ 于 $X$, 注意到 $M$ 为 $AB$ 中点, 故 $BX=2MH=2ON$, 由熟知的外心性质

可知 $X$ 为 $\triangle BCE$ 的垂心, 从而 $CX \perp BD$, 即 $AC \perp BD$. $\square$

**7.** 设正整数 $n = 2^{\alpha} \cdot q$, 其中 $\alpha$ 为非负整数, $q$ 为奇数. 证明: 对任意正整数 $m$, 方程 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = m$ 的整数解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的个数能被 $2^{\alpha+1}$ 整除.

(王广廷 供题)

**证法一** 设方程 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = m$ 的解的个数为 $N(m)$. 设 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是方程 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = m$ 的一个非负整数解. 不妨设其中有 $k$ 个非零项, 注意到 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的每个分量有正负两种情况, 则恰好对应原方程的 $2^k$ 个整数解. 设 $S_k$ 是该方程的恰有 $k$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$ 个非零项的非负整数解的个数. 则

$$N(m) = \sum_{k=1}^{n} 2^k \cdot S_k.$$

因为 $k$ 个非零项的非负整数解有 $\binom{n}{k}$ 种位置可选, 故 $\binom{n}{k} \mid S_k$.

故要证明 $2^{\alpha+1} \mid N(m)$, 只需证明: $2^{\alpha-k+1} \mid \binom{n}{k}$.

注意到 $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$, 分子中 2 的因子个数至少为 $\alpha$, 而分母中的 2 的因子个数为

$$\sum_{i=1}^{[\log_2 k]} [\frac{k}{2^i}] < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{2^i} = k,$$

故分母的 2 的因子至多有 $k-1$ 个, 所以 $2^{\alpha-k+1} \mid \binom{n}{k}$. 即 $2^{\alpha-k+1} \mid N(m)$. $\square$

**评注** 这个问题中要证明 $2^{\alpha-k+1} \mid \binom{n}{k}$, 实际也可以用 Kummer 定理处理. Kummer 定理是指: 设 $n, i$ 是正整数且 $i \leq n$, $p$ 是素数, 则 $p^t \parallel \binom{n}{k}$ 当且仅当在 $p$ 进制中, $(n-i)+i$ 发生了至多 $t$ $(t \geq 0)$ 次进位.

**证法二** 记 $f(n, m)$ 为该方程整数解的个数. 首先证明如下关于 $f(n, m)$ 的递推关系:

引理 $\quad f(2n, m) = 2f(n, m) + \sum\limits_{k=1}^{m-1} f(n, k) f(n, m-k)$.

引理证明 设 $(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$ 是方程 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{2n}^2 = m$ 的一个解. 设

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = k.$$

若 $k = 0$, 则 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (0, 0, \cdots, 0)$, 且 $x_{n+1}^2 + x_{n+2}^2 + \cdots + x_{2n}^2 = m$, 这样的 $(x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{2n})$ 有 $f(n, m)$ 组. 故当 $k = 0$ 时, 原方程有 $f(n, m)$ 组解.

同理可知, 当 $k = m$ 时, 原方程也有 $f(n, m)$ 组解.

当 $1 \leq k \leq m-1$ 且 $k$ 为正整数时, 方程 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = k$ 有 $f(n, k)$

个解, 方程 $x_{n+1}^2+x_{n+2}^2+\cdots+x_{2n}^2=m-k$ 有 $f(n,m-k)$ 个解. 由此可得方程 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{2n}^2=m$ 有 $f(n,k)f(n,m-k)$ 组解.

综上可知,

$$f(2n,m)=2f(n,m)+\sum_{k=1}^{m-1}f(n,k)f(n,m-k).$$

**回到原题.** 下面证明当 $n=2^\alpha\cdot q$ 时, 有 $2^{\alpha+1}\mid f(n,m)$. ①

对 $\alpha$ 进行归纳.

当 $\alpha=0$ 时, 由于对原方程的任意一组解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)$ 也是该方程的一组解. 由于 $m$ 是正整数, 因此, $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 不全为零. 故 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $(-x_1,-x_2,\cdots,-x_n)$ 是不同的两个解. 于是原方程的解可以两两配对. 故

$$2=2^{0+1}\mid f(n,m).$$

假设 ① 对 $\alpha$ 成立, 下面考虑 $\alpha+1$ 的情形. 注意到

$$f(n,m)=2f(\frac{n}{2},m)+\sum_{k=1}^{m-1}f(\frac{n}{2},k)f(\frac{n}{2},m-k).$$

注意到此时 $n=2^{\alpha+1}\cdot q$, 故 $\frac{n}{2}=2^\alpha\cdot q$. 因此由归纳假设, 知 $2^{\alpha+1}$ 分别整除 $f(\frac{n}{2},m)$, $f(\frac{n}{2},k)$, $f(\frac{n}{2},m-k)$, 故

$$2^{\alpha+2}\mid 2f(\frac{n}{2},m),\ \ 2^{2(\alpha+1)}\mid\sum_{k=1}^{m-1}f(\frac{n}{2},k)f(\frac{n}{2},m-k).$$

由于 $2(\alpha+1)\geq\alpha+2$, 因此 $2^{\alpha+2}\mid f(n,m)$.

综上可知, ① 式成立. 所以原问题得证. □

**8.** 设整数 $n\geq 2$, 证明: 对任意正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 都有

$$\sum_{i=1}^{n}\max\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}\cdot\min\{a_i,a_{i+1},\cdots,a_n\}\leq\frac{n}{2\sqrt{n-1}}\cdot\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

(张端阳 供题)

**证明** 对 $n$ 用第二数学归纳法.

当 $n=2$ 时, 左式 $=a_1\cdot\min\{a_1,a_2\}+\max\{a_1,a_2\}\cdot a_2$.

若 $a_1\geq a_2$, 则原式等价于 $2a_1a_2\leq a_1^2+a_2^2$, 命题成立;

若 $a_1\leq a_2$, 则原式等价于 $a_1^2+a_2^2\leq a_1^2+a_2^2$, 命题成立.

假设命题对所有大于等于 2 且小于 $n$ 的正整数成立, 来看 $n$ 时的情形.

对 $2\leq i\leq n$, 记 $c_i=\frac{i}{2\sqrt{i-1}}$, 再令 $c_1=1$, 容易验证 $c_1=c_2<c_3<\cdots<c_n$.

记 $M=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$, 并设 $a_k=M$.

当 $k=1$ 时, 原式 $=M\sum\limits_{i=1}^{n}\min\{a_i,a_{i+1},\cdots,a_n\}$. 因为

$$\min\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}=\min\{a_2,\cdots,a_n\}\le\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}a_i,$$

且当 $2\le i\le n$ 时, $\min\{a_i,a_{i+1},\cdots,a_n\}\le a_i$, 所以

$$\sum_{i=1}^{n}\min\{a_i,a_{i+1},\cdots,a_n\}\le\frac{1}{n-1}\sum_{i=2}^{n}a_i+\sum_{i=2}^{n}a_i=\frac{n}{n-1}\sum_{i=2}^{n}a_i.$$

由均值不等式,

$$\begin{aligned}\text{原式}&\le\frac{n}{n-1}M\sum_{i=2}^{n}a_i\le\frac{n}{2\sqrt{n-1}}[M^2+\frac{1}{n-1}(\sum_{i=2}^{n}a_i)^2]\\&\le\frac{n}{2\sqrt{n-1}}(M^2+\sum_{i=2}^{n}a_i^2)=\frac{n}{2\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2.\end{aligned}$$

当 $k=n$ 时, $\min\{a_i,a_{i+1},\cdots,a_n\}=\min\{a_i,a_{i+1},\cdots,a_{n-1}\}$, 所以

$$\text{原式}=\sum_{i=1}^{n-1}\max\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}\cdot\min\{a_i,a_{i+1},\cdots,a_{n-1}\}+M^2.$$

由归纳假设,

$$\sum_{i=1}^{n-1}\max\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}\cdot\min\{a_i,a_{i+1},\cdots,a_{n-1}\}\le c_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2,$$

所以

$$\text{原式}\le c_{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2+M^2<\frac{n}{2\sqrt{n-1}}(\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2+M^2)=\frac{n}{2\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

当 $2\le k\le n-1$ 时, 结合 $k=1$ 和 $k=n$ 时的证明得,

$$\begin{aligned}\text{原式}&=\sum_{i=1}^{k-1}\max\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}\cdot\min\{a_i,a_{i+1},\cdots,a_n\}+M\sum_{i=k}^{n}\min\{a_i,a_{i+1},\cdots,a_n\}\\&\le\sum_{i=1}^{k-1}\max\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}\cdot\min\{a_i,a_{i+1},\cdots,a_{k-1}\}+\frac{n-k+1}{n-k}M\sum_{i=k+1}^{n}a_i\\&\le c_{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}a_i^2+\frac{n-k+1}{2\sqrt{n-k}}(M^2+\sum_{i=k+1}^{n}a_i^2)\\&=c_{k-1}\sum_{i=1}^{k-1}a_i^2+c_{n-k+1}\sum_{i=k}^{n}a_i^2<\frac{n}{2\sqrt{n-1}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2.\end{aligned}$$

综上, 命题得证. □

**评注** 取 $a_1=\sqrt{n-1}$, $a_2=\cdots=a_n=1$ 可知, 常数 $\frac{n}{2\sqrt{n-1}}$ 是最佳的.