第二十一期问题征解解答与点评

牟晓生

第一题. 设 $a_1,\dots,a_n\in[0,1]$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\prod_{j\neq i}a_j\right)^{\frac{n}{2}}\cdot\sqrt{1-a_i}\right]\leq 1.$$

(浙江省杭州二中 赵斌 供题)

证法一 (根据西北师大附中张江昊同学的解答整理):

首先注意到下面的引理:

引理 对任意 $x_1,x_2,\dots,x_n\in[0,1]$,

$$1+(n-1)x_1x_2\dots x_n\geq\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}x_j.$$

引理的证明很简单, 只要考虑每个 x_i 取 0 或 1 时的情况即可.

回到原题, 用柯西不等式及引理得

$$\begin{aligned}&\left[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j\neq i}a_j)^{\frac{n}{2}}\cdot\sqrt{1-a_i}\right]^2\\&=\left[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j\neq i}a_j)^{\frac{n-1}{2}}\cdot\sqrt{(1-a_i)\prod_{j\neq i}a_j}\right]^2\\&\leq\left[\sum_{i=1}^{n}(\prod_{j\neq i}a_j)^{n-1}\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{n}(1-a_i)\prod_{j\neq i}a_j\right]\\&\leq\left[1+(n-1)(a_1\cdots a_n)^{n-1}\right]\cdot\left[1-a_1\cdots a_n\right].\end{aligned}\tag{1}$$

令 $t=a_1\cdots a_n$, 则只要证明

$$(1+(n-1)t^{n-1})(1-t)\leq 1.$$

这是很显然的, 因为 $\frac{1}{1-t}>1+t+\cdots+t^{n-1}>1+(n-1)t^{n-1}$. 由此也可以看出原命题中 $\frac{n}{2}$ 这个幂次至少可以改进为 $\frac{n+2}{4}$. □

证法二 (根据湖南师大附中杨学文同学的解答整理):

(i) 若存在 $a_i=0$, 则结论显然成立.

(ii) 不妨设所有 a_i 均属于 $(0,1]$.

令 $a_i=\frac{1}{t_i}$, $i=1,2,\cdots,n$, 则 $t_i\ge 1$. 所证不等式等价于

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{t_i^n-t_i^{n-1}}\le\left(\prod_{i=1}^{n}t_i\right)^{\frac{n}{2}}. \tag{1}$$

由 Cauchy不等式知

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{t_i^n-t_i^{n-1}}=\sum_{i=1}^{n}t_i^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{t_i-1}\le\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^{n-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i-1)\right)}.$$

要证 (1) 式, 只须证

$$\left(\sum_{i=1}^{n}t_i^{n-1}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(t_i-1)\right)\le\prod_{i=1}^{n}t_i^n. \tag{2}$$

其中 $t_i\ge 1$, $i=1,2,\cdots,n$.

令 $b_i=t_i-1$, 则 $b_i\ge 0$, $i=1,2,\cdots,n$. 这时 (2) 式等价于

$$\sum_{i=1}^{n}(b_i+1)^{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i\le\prod_{i=1}^{n}(b_i+1)^n. \tag{3}$$

下证 (3) 式. 由贝努利不等式,

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(b_i+1)^n&=\prod_{i=1}^{n}(b_i+1)^{n-1}\cdot\prod_{i=1}^{n}(b_i+1)\\&\ge\prod_{i=1}^{n}(b_i+1)^{n-1}\left(1+\sum_{i=1}^{n}b_i\right)\\&=\prod_{i=1}^{n}(b_i+1)^{n-1}+\prod_{i=1}^{n}(b_i+1)^{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i.\end{aligned} \tag{4}$$

又由广义贝努利不等式,

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i+1)^{n-1}\ge\sum_{i=1}^{n}(b_i+1)^{n-1}-n+1. \tag{5}$$

另一方面,

$$\prod_{i=1}^{n}(b_i+1)^{n-1}\ge\prod_{i=1}^{n}(1+(n-1)b_i)\ge 1+(n-1)\sum_{i=1}^{n}b_i. \tag{6}$$

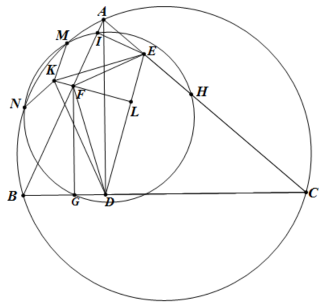
由 (4),(5),(6) 可知

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{n}(b_i+1)^n&\ge 1+(n-1)\sum_{i=1}^{n}b_i+\left(\sum_{i=1}^{n}(b_i+1)^{n-1}-n+1\right)\sum_{i=1}^{n}b_i\\&=\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot\sum_{i=1}^{n}(b_i+1)^{n-1}+1\\&>\sum_{i=1}^{n}b_i\cdot\sum_{i=1}^{n}(b_i+1)^{n-1},\end{aligned}$$

即 (3) 式成立, 证毕. □

评注 (1). 湖南师大附中周义云同学也给出了本题的正确解答.

(2). 对 n 进行归纳与反向归纳 (类似于AM-GM) 也可以证明本题.



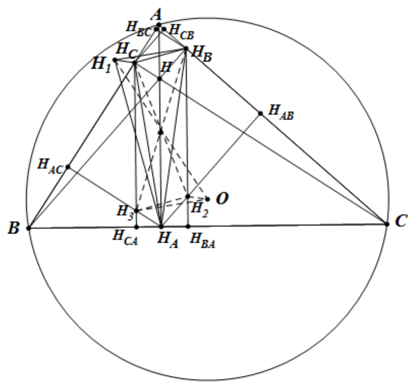
第二题. 如图, 三角形 ABC 的高分别为 AD, BE, CF. K 为 $\triangle DEF$ 的垂心, L 为直线 KF 与 DE 的交点. G, H, I 分别为 F, D, E 在 BC, CA, AB 上的垂足. M, N 为 $\triangle GHI$ 的外接圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点. 证明: $KM = KN = \sqrt{KF \cdot KL}$.

(北京大学学生 徐恺, 华中师大一附中学生 姚睿 供题)

解法一 (**根据雅礼中学谭梓阳同学的解答整理**):

先证明一个引理.

引理 设 $\triangle ABC$ 三边 BC, CA, AB 边上高的垂足分别为 H_A, H_B, H_C. H_A 在 AB, AC 上的射影分别为 H_{AC}, H_{AB}. 同理定义 H_{BA}, H_{BC}; H_{CA}, H_{CB}. 设 $\triangle H_AH_BH_C$ 的垂心为 H_1. 则 $H_{AC}, H_{AB}, H_{BA}, H_{BC}, H_{CA}, H_{CB}$ 共圆, 且其圆心为 OH_1 中点.



引理证明 由于 $\angle CH_BH_A = \angle CHH_A = \angle CH_CH_{CA} = \angle CH_{CB}H_{CA}$, 故

$$H_BH_A \parallel H_{CB}H_{CA}, \quad \frac{CH_B}{CH_A} = \frac{CH_{CB}}{CH_{CA}}.$$

又 H_B, H_{AB}, H_{BA}, H_A 共圆, 故 $CH_B \cdot CH_{AB} = CH_A \cdot CH_{BA}$. 则

$$CH_{AB} \cdot CH_{CB} = CH_{BA} \cdot CH_{CA}.$$

这说明 $H_{AB}, H_{CB}, H_{BA}, H_{CA}$ 共圆.

同理, $H_{AB}, H_{CB}, H_{AC}, H_{BC}$; $H_{BA}, H_{CA}, H_{AC}, H_{BC}$ 分别共圆.

由 Davis 定理知 $H_{AC},H_{AB},H_{BA},H_{BC},H_{CA},H_{CB}$ 共圆.

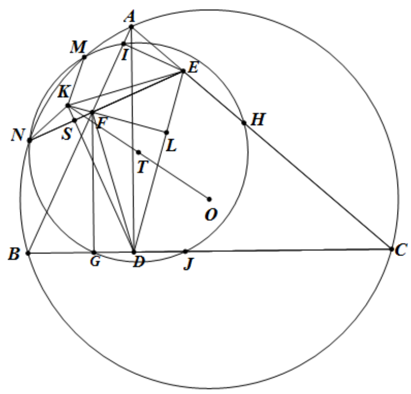
设 $\triangle CH_BH_A$, $\triangle BH_CH_A$ 的垂心分别为 H_2,H_3. 由于 T 在 $H_{CA}H_{BA}$ 及 $H_{BC}H_{AC}$ 的中垂线上. 故 T 为 H_BH_3 中点.

同理, T 为 H_CH_2 中点.

这说明 $H_2H_3H_CH_B$ 为平行四边形. H_2H_3 与 H_BH_C 平行且相等. 又 H_AH_B 逆平行于 AB. 故 $OH_2\perp H_AH_B$, 结合 $H_1H_C\perp H_AH_B$ 知 $OH_2 \parallel H_1H_C$.

同理 $OH_3 \parallel H_1H_B$. 故 $\triangle OH_2H_3 \cong \triangle H_1H_CH_B$, OH_3 与 H_1H_B 平行且相等.

故 T 为 OH_1 中点. 引理得证!



回到原题. 记 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R. $\triangle GHI$ 的外接圆半径为 R_T. 设 $\triangle GHI$ 的外心为 T, 作 E 在 BC 上的射影 J.

由引理, J 在 $\odot T$ 上, 且 T 为 OK 中点.

由于 K 在 OT 上, 故 $KM=KN$.

在 $\triangle OMK$ 中, 由中线长公式 $MT^2=\frac{1}{2}KM^2+\frac{1}{2}MO^2-OT^2$, 即

$$\begin{aligned} KM^2 &= 2MT^2+2OT^2-MO^2\\ &= 2R_T^2+2OT^2-R^2. \end{aligned}$$

在 $\triangle OKD$ 中, 由中线长公式 $DT^2=\frac{1}{2}KO^2+\frac{1}{2}OD^2-OT^2$, 即

$$OT^2=\frac{1}{2}KD^2+\frac{1}{2}OD^2-DT^2.$$

在 $\odot T$ 中, 由圆幂定理得 $TD^2=R_T^2-JD\cdot DG$. 故

$$\begin{aligned} OT^2 &= \frac{1}{2}KD^2+\frac{1}{2}OD^2-R_T^2+JD\cdot DG,\\ KM^2 &= KD^2+OD^2+2JD\cdot DG-R^2\\ &= KD^2+2JD\cdot DG-CD\cdot DB\ (\text{圆幂定理}). \end{aligned}$$

设 EF 交 KD 于 S,

$$
\begin{aligned}
&KD^2+2JD\cdot DG-CD\cdot DB-KF\cdot KL\\
=&KD^2+2JD\cdot DG-CD\cdot DB-KS\cdot KD\\
=&DS\cdot DK+2JD\cdot DG-CD\cdot DB\\
=&DL\cdot DE+2JD\cdot DG-CD\cdot DB\\
=&DF\cdot DE\cdot\cos\angle FDE+2DF\cdot DE\cdot\cos\angle FDB\cdot\cos\angle EDC-CD\cdot DB.
\end{aligned}
$$

又 $\angle FDB=\angle EDC=\angle BAC$. 故

$$
\begin{aligned}
&KD^2+2JD\cdot DG-CD\cdot DB-KF\cdot KL\\
=&DF\cdot DE\cdot(-\cos 2\angle BAC)+2DF\cdot DE\cdot\cos^2\angle BAC-CD\cdot DB\\
=&DF\cdot DE-CD\cdot DB=0\ (\triangle BDF\backsim\triangle EDC).
\end{aligned}
$$

故 $KM^2-KF\cdot KL=0$.

故 $KM=KN=\sqrt{KF\cdot KL}$, 得证! □

解法二 (根据供题者提供的解答整理):

由于这里的计算过程不是特别重要, 我们把计算过程写作一个引理.

引理 在 $\triangle ABC$ 中,

$$
\begin{aligned}
&1+2\cos 2A\cos 2B\cos 2C\\
=&\cos^2 A+\cos^2(B-C)\cos^2 2A+\frac{1}{2}(1-\cos 2A)^2\sin^2(B-C)\\
&+2\sin^2 A\cos^2 A\cos^2(B-C).
\end{aligned}
$$

引理证明 注意到

$$
\begin{aligned}
\cos 2A\cos 2B\cos 2C&=\cos 2A\cdot\frac{1}{2}[\cos(2B-2C)+\cos(2B+2C)]\\
&=\frac{1}{2}\cos^2 2A+\cos^2(B-C)\cos 2A-\frac{1}{2}\cos 2A.
\end{aligned}
$$

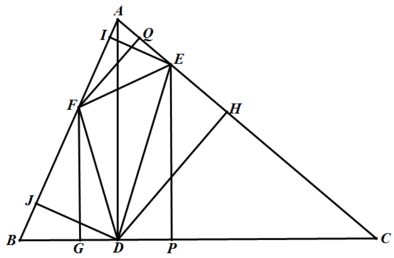
设 $\alpha=2A$, $\beta=B-C$, 在求证式子中取 (左 $-$ 右) 并代入上式, 得到:

$$
\begin{aligned}
&1+\frac{1}{2}\cos^2\alpha+\cos^2\beta\cos\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}(1+\cos\alpha)\\
&\quad-\cos^2\beta\cos^2\alpha-\frac{1}{2}(1-\cos\alpha)^2\sin^2\beta-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\cos^2\beta\\
=&1+\frac{1}{2}\cos^2\alpha+\cos^2\beta\cos\alpha-\frac{1}{2}-\cos\alpha-(\frac{1}{2}\cos^2\beta\cos^2\alpha+\frac{1}{2}\cos^2\beta\cos^2\alpha)\\
&-(\frac{1}{2}\sin^2\beta+\frac{1}{2}\cos^2\alpha\sin^2\beta-\cos\alpha\sin^2\beta)-\frac{1}{2}\sin^2\alpha\cos^2\beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} + (\cos^2\beta\cos\alpha + \sin^2\beta\cos\alpha - \cos\alpha) \\
&\quad - \frac{1}{2}(\cos^2\beta\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\beta - \cos^2\alpha) \\
&\quad - \frac{1}{2}(\cos^2\beta\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta) \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

回到原题. 我们说两个结论.

(1) 如图, 我们把另外三个垂足作出来, 那么 I, Q, J, G, P, H 六个点共圆.



证明如下:

由于 $\angle AJH = \angle ADH = \angle ACB = \angle AQI$, 那么我们就有 I, J, Q, H 共圆.

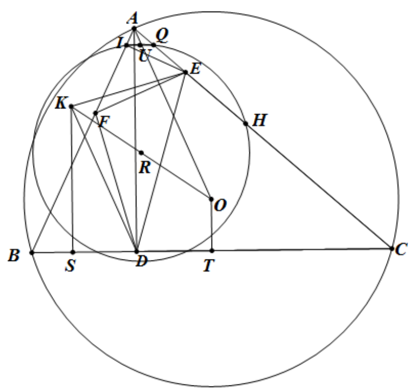
同理有 I, J, G, P 以及 E, H, G, P 共圆.

如果这六个点不共圆那么这里共的三个圆两两的根轴分别是 AB, BC, CA 并不是三线共点, 矛盾. 那么这六点共圆.

记这个圆圆心是 R, 我们再次证明一个结论:

(2) R 是 OK 中点, 其中 O 是三角形 ABC 外心.

我们先证明, R 在 BC 上投影是 K, O 在 BC 上投影的中点, 如果这个证明完毕, 那么 R 在 CA 上也表现出相同的性质, 继而可以采用斜坐标记法证明 R 是 O, K 中点.



我们建立平面直角坐标系, 以 D 为原点. 那么我们只需证 $2X_R = X_O + X_K$,

这里设 T 是 BC 中点也是 O 往 BC 作垂线的垂足, S 是 K 往 BC 的投影, U 是 IQ 中点.

我们知道 $IQ \parallel BC$, 并且长度比是 $\frac{IQ}{BC} = \frac{AQ}{AC} = \frac{AQ}{AE} \cdot \frac{AE}{AC} = \cos^2 A$.

那么由于 A, U, T 共线以及 IQ 中垂线过 R 我们有

$$X_R = X_U = \frac{IQ}{BC} X_T = \cos^2 A X_T = \cos^2 A X_O.$$

由熟知结论, KD 和 AO 平行而且

$$KD = 2R_1 \cdot \cos\angle FDE = -R_0 \cdot \cos 2A.$$

这里式子的 R_0 是 $\triangle ABC$ 外接圆半径, R_1 是 $\triangle DEF$ 的外接圆半径.

那么 $\overrightarrow{KD} = -\cos 2A \overrightarrow{AO}$, 即 $X_K = \cos 2A X_O$, 由于 $\cos 2A + 1 = 2\cos^2 A$. 我们就有 $2X_R = X_O + X_K$. 故 R 是 OK 中点.

现在我们来证明原题.

注意到第二个结论里面蕴含了两个圆心和 K 共线, 那么 $KM = KN$ 是显然的了.

设 S, T 是 K, O 在 BC 上投影, 由于我们知道一个基本事实: 到两点距离的平方和是一个定值 (这个定值需要一定范围) 的轨迹是一个圆.

那么以 K 为圆心, $\sqrt{KF \cdot KL}$ 为半径做的圆也过 M, N 的充分必要条件是

$$KF \cdot KL + R_0^2 = KX^2 + OX^2.$$

其中 X 是圆 R 上面的任何一点.

由第二个结论我们还可以知道, $SG = PT$ (因为 GP 中垂线也过 R).

分别取 X 为 P 和 G 我们知道

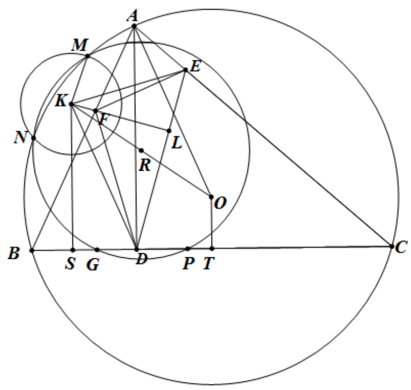
$$\begin{aligned} KX^2 + OX^2 &= \frac{KG^2 + OG^2 + KP^2 + OP^2}{2} \\ &= KS^2 + OT^2 + \frac{1}{2}(PG^2 + ST^2). \end{aligned}$$

所以我们只需证

$$KF \cdot KL + R_0^2 = KS^2 + OT^2 + \frac{1}{2}(PG^2 + ST^2).$$

现在我们正式的需要这个图了，我们一一来看:

$$\begin{aligned} &KF = 2R_1 \cdot \cos 2C = R_0 \cdot \cos 2C, \\ &KL = KE \cos\angle EKL = 2R_1 \cdot \cos(\pi - 2B) \cdot \cos(\pi - 2A) = R_0 \cdot \cos 2B \cos 2A, \\ &KS = KD \cdot \cos\angle OAD = -\cos 2A \cdot AO \cdot \cos(B - C) \\ &\quad = -R_0 \cdot \cos 2A \cos(B - C) OT = R_0 \cdot \cos A, \end{aligned}$$



$$
\begin{aligned}
PG &= EF \cdot \cos\angle(EF, BC) = BC \cdot \cos A \cdot \cos(B-C) \\
&= R_0 \cdot 2\sin A\cos A\cos(B-C), \\
ST &= (AO + KD) \cdot \sin\angle OAD = AO(1-\cos 2A)\cdot\sin(B-C) \\
&= R_0 \cdot (1-\cos 2A)\sin(B-C).
\end{aligned}
$$

那么我们由于只需证:

$$KF \cdot KL + R^2 = KS^2 + OT^2 + \frac{1}{2}(PG^2 + ST^2).$$

转而证明

$$
\begin{aligned}
& R\cdot\cos 2C \cdot R\cdot\cos 2B\cos 2A + R^2 \\
= {} & (-R\cdot\cos 2A\cos(B-C))^2 + (R\cdot\cos A)^2 + \frac{1}{2}((R\cdot 2\sin A\cos A\cos(B-C))^2 \\
& + (R\cdot(1-\cos 2A)\sin(B-C))^2).
\end{aligned}
$$

两边约去 R 的平方, 即得引理条件, 证毕. □

评注 浙江省衢州二中毛恒毅, 湖南师大附中杨学文, 罗横溢同学也给出了本题的正确解答.

第三题. 在 $2n \times 2n$ 的方格表中填入 ± 1, 满足所有数之和为零. 证明可以找到 n 行 n 列, 它们相交的 $n \times n$ 子方格表中所有数之和至少是 n.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

证明 (根据浙江杭州二中刘浩宇同学的解答整理):

先证明 n 为偶数时的情况. 由于表中所有数的和非负, 一定存在一行的和非负. 于是这一行有 n 个“1”, 不妨设它们在前 n 列. 令 A (B) 分别为前 (后) n 列构成的子表, 取 A_1 为 A 中行和最大的 n 行, 其余的为 A_2. 如果 A_1 中数的

和至少是 n, 命题得证. 否则由于 A_1 中有一行和为 n, 故必有一行和为负数. 由选择, A_2 中每一行的和均为负数. 由于 n 为偶数, A_2 中每一行的和至多是 -2. 于是 A 的所有数之和小于 $n+n\times(-2)=-n$.

所以 B 中所有数之和大于 n. 此时令 B_1 为 B 中行和最大的 n 行, 其余的为 B_2. 如果 B_2 中所有数之和非负, 则 B_1 中所有数之和大于 n, 命题亦成立. 否则 B_2 中必有一行的和大于零, 于是 B_1 中每一行的和大于零. 这样 B_1 中所有数之和也至少是 n, n 为偶数时命题得证!

接下来考虑 n 为奇数. 令 P 为和最大的 $n\times n$ 子表, 不妨设其在前 n 行前 n 列. 我们可以自然地将整张表划分为四个 $n\times n$ 子表 P,Q,R,S, 其中 Q 在 P 的右边而 R 在 P 的下边. 假设 P 的和小于 n, 则 P 中必有一列的和至多是零. 由 P 的最大性, Q 中每一列的和都至多是零. 然而 n 为奇数, 所以 Q 中每一列的和都至多是 -1. 故 Q 的和至多是 $-n$, 同样地 R 的和至多是 $-n$. 于是 P 或者 S 的和至少是 n, 命题得证! □

评注 (1). 雅礼中学陈伊一, 西北师大附中张江昊同学也给出了正确解答.

(2). 我所知道的解答都大同小异, 只能证明存在一个 $n\times n$ 子表的和不小于 n. 有兴趣的同学可以研究这个结论是否能够加强. 换而言之, 是否存在满足题目条件的一个方格表, 使得每个 $n\times n$ 子表的和都不大于 n?

第四题. 给定素数 p 以及正整数 k. 求最小的正整数 d, 使得存在 d 次整值多项式 f, 满足 $p|f(n)$ 当且仅当 $p^k|n$.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

解 (**根据东北师大附中徐洋同学的解答整理**):

答案是 $2p^{k-1}-1$.

一方面, 构造 $f(x)=\binom{x+2p^{k-1}-1}{2p^{k-1}-1}-1$. 令 $x+2p^{k-1}-1$ 在 p 进制下的最后 k 位为 $t_{k-1},\dots,t_1,t_0$, 则由卢卡斯定理,

$$f(x)\equiv\binom{t_{k-1}}{1}\cdot\prod_{j=0}^{k-2}\binom{t_j}{p-1}-1\pmod p.$$

由此易见 $p\mid f(x)$ 当且仅当 $t_{k-1}=1$ 以及 $t_{k-2}=\cdots=t_0=p-1$. 也就是 $p\mid f(x)$ 当且仅当 $p^k\mid x$.

另一方面, 假设 $f(x)$ 的次数小于 $2p^{k-1}-1$. 由于 $f(x)$ 是整值多项式, 可将

它写为

$$f(x)=\sum_{m=0}^{2p^{k-1}-1} a_m\binom{x}{m},$$

其中 a_m 为整数, 而由假设 $a_{2p^{k-1}-1}=0$. 由于 $p\mid f(0)$, 我们有 $p\mid a_0$. 而 $p\nmid f(p^{k-1})$, 所以 $p\nmid a_{p^{k-1}}$.

对 $1\le u\le p^{k-1}-1, 0\le v\le p-1$, 由卢卡斯定理知

$$f(u+v\cdot p^{k-1})\equiv\sum_{i=1}^{u} a_i\binom{u}{i}+v\cdot\left[\sum_{j=0}^{u} a_{p^{k-1}+j}\binom{u}{j}\right].$$

由条件, 这些都不是 p 的倍数. 固定 u, 令 v 变化, 则知

$$p\mid\sum_{j=0}^{u} a_{p^{k-1}+j}\binom{u}{j},\ \forall 1\le u\le p^{k-1}-1.$$

由此以及简单归纳可以证明 $p\mid a_{p^{k-1}+u}+a_{p^{k-1}+u-1}, \forall 1\le u\le p^{k-1}-1$. 结合 $a_{2p^{k-1}-1}=0$ 可知 $a_{p^{k-1}},\ldots,a_{2p^{k-1}-1}$ 都是 p 的倍数. 这样就与之前得到的 $p\nmid a_{p^{k-1}}$ 相矛盾了! $\square$

评注 湖南雅礼中学陈伊一同学也给出了本题的正确解答.