数学新星问题征解

第二十一期 (2017.05)

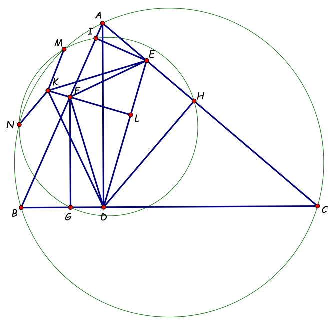
主持: 牟晓生

第一题. 设 $a_1, \ldots, a_n \in [0,1]$. 证明:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\prod_{j\neq i} a_j\right)^{\frac{n}{2}} \cdot \sqrt{1-a_i}\right] \le 1.$$

(浙江省杭州二中 赵斌 供题)

第二题. 如图, 三角形 ABC 的高分别为 AD, BE, CF. K 为 $\triangle DEF$ 的垂心, L 为直线 KF 与 DE 的交点. G, H, I 分别为 F, D, E 在 BC, CA, AB 上的垂足. M, N 为 $\triangle GHI$ 的外接圆与 $\triangle ABC$ 的外接圆的交点. 证明: $KM = KN = \sqrt{KF \cdot KL}$.



(北京大学学生 徐恺, 华中师大一附中学生 姚睿 供题)

第三题. 在 $2n \times 2n$ 的方格表中填入 ± 1, 满足所有数之和为零. 证明可以找到 n 行 n 列, 它们相交的 $n \times n$ 子方格表中所有数之和至少是 n.

(哈佛大学 牟晓生 供题)

第四题. 给定素数 p 以及正整数 k. 求最小的正整数 d, 使得存在 d 次整值多项式 f, 满足 $p | f(n)$ 当且仅当 $p^k | n$.

(哈佛大学 牟晓生 供题)